EPREUVE DE MATHEMATIQUES BACC CDE (GCE AL) 2013

Exercice 1 (5 pts)

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètre que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $=\frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par : $p(D \leq A) = \int_0^A \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a) Comprise entre 50 et 100 km ;
   b) Supérieure à 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ?
3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident

   a) Au moyen d'une intégration par parties, calculer $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ où A est un nombre réel positif.
   b) Calculer la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (cette limite représente la distance moyenne cherchée)

4. L'entreprise possède N_O autocars. Les distances parcourues par chacun de autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   a) Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètre N_O et $e^{-\lambda d}$.
   b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Exercice 2 (5 pts)

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct ($O,\vec{u},\vec{v}$). On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes. On considère l'application F du plan P dans lui-même qui, à tout point M, d'affixe z, associe le point M' d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$. L'objet de cet exercice est de tracer la courbe Γ décrite par M' lorsque M décrit le cercle C de centre 0 et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi, \pi]$ et M le point du cercle C, d'affixe $z = e^{it}$

1. Montrer que l'image M' de M par F est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}cos2t - cost \\ y(t) = \frac{1}{2}sin2t - sint \end{cases}$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe Γ.

2. Comparer x(-t) et x(t) d'une part, y(-t) et y(t) d'autre part. en déduire que Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que x'(t)=sint(1-2cost). Etudier les variations de x sur $[0, \pi]$.
4. Montrer que y'(t)=(cost-1)(1+2cost). Etudier les variations de y sur $[0, \pi]$.
5. Dans un même tableau présenter les variations de x et y sur $[0, \pi]$.
6. Placer les ponts de Γ correspondant aux valeurs $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour tout t = 0 la tangente à Γ est horizontale). Tracer la partie de Γ obtenue lorsque t décrit $[0, \pi]$.puis tracer Γ complètement.

Exercice 3 (5 pts)

1.
 a) Montrer que pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ par $n + 3$
 b) Montrer que, pour tout entier naturel n,$3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul a, b, et c, l'égalité suivante est vraie :
PGCD (a ; b) = PGCD (bc- a ; b)
3. Montrer que pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie : PGCD$(3n^3 - 11n\,; n + 3) = PGCD\ (48\,; n + 3)$.
4.
 a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48
 b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\lambda = \frac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel

Exercice 4(5 pts)

On considère la suite (U_n) définie par $U_1 = \frac{3}{2}$et, pour tout entier n≥ 1, $U_{n+1} = U_n(1 + \frac{1}{2^{n+1}})$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier n≥ 1, on a $U_n \geq 0$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier n≥ 1,
$$lnU_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$
3. Pour tout entier n≥ 1, on pose : $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}$
   a) Calculer S_n et $T_n$en fonction de n.
   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} T_n$
4. On admet que, pour tout x≥ 0, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$. Montrer que, pour tout entier n≥ 1
$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq lnU_n \leq S_n$$
5.
   a) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.
   b) On admet que la suite (U_n) est convergente et on désigne par l sa limite. Déduire des questions précédentes que : $\frac{5}{6} \leq l \leq 1$.