

CORRECTION DE MATHEMATIQUES BACC F ET BT (GCE AL) 2012

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par u_0 donné et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$. On pose $v_n = u_n - 6$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} \text{On a : } v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 6) \\ &= \frac{1}{3}v_n \quad \text{avec } v_0 = u_0 - 6 \end{aligned}$$

On conclut donc que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6$

2. Calculons v_n en fonction de n .

(v_n) étant géométrique donc $v_n = q^n v_0$

$$v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - 6)$$

$q < 1 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ par conséquent la suite (v_n) est convergente.

3. Déterminons la limite de la suite (u_n) .

$$u_n = v_n + 6 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + 6) = 6 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

4. Calculons la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n .

(v_n) étant une suite géométrique, par définition on a :

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{3}{2}(u_0 - 6)\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

5. Déduisons la somme $\sum_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .

$$\sum_n = v_0 + 6 + v_1 + 6 + \dots + v_n + 6 = S_n + 6(n+1)$$

$$\sum_n = \frac{3}{2}(u_0 - 6)\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 6(n+1)$$

Exercice 2

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 10 = 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \times 10 = 36i^2$$

$$z_1 = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$$

$$z_2 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

2. Déterminons les nombres complexes c et d

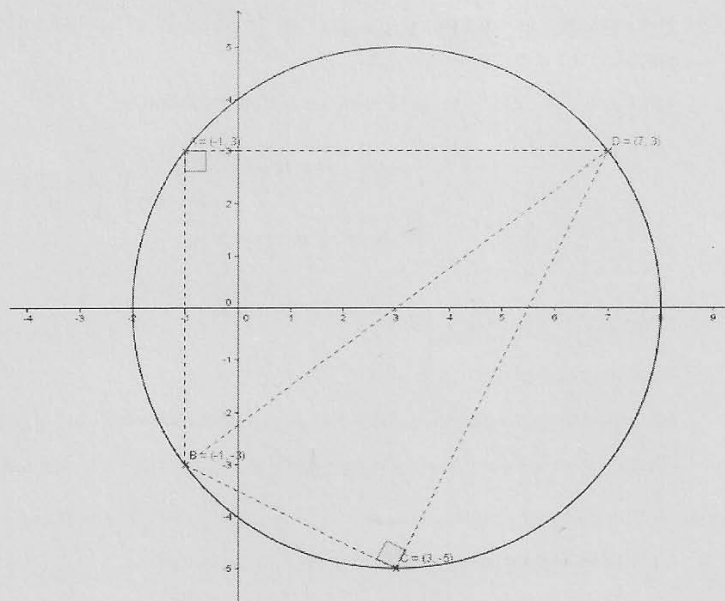
$$\begin{cases} -2c + d = 1 + 13i & (1) \\ -c + d = 4 + 8i & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow c = 5 - 3i \quad \text{et donc} \quad d = 7 + 3i$$

$$\underline{c = 5 - 3i \text{ et } d = 7 + 3i}$$

- 3.

- a. Plaçons les points A, B, C et D sur la figure



- b. Démontrons que le triangle BAD est rectangle en A.

Posons $Z_1 = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$

$$Z_1 = \frac{7+3i+1-3i}{-1-3i+1-3i} = \frac{4}{-6}i ; \text{ On a } \arg(Z_1) = \frac{\pi}{2}$$

Or $\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \arg(Z_1) = \frac{\pi}{2}$ par conséquent le triangle BAD est rectangle en A

- c. Démontrons que le triangle BCD est rectangle en C.

Posons $Z_2 = \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_C}$; après calcul on a $Z_2 = -2i$ et donc $\arg(Z_2) = \frac{\pi}{2}$

Or $\arg(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(Z_2) = \frac{\pi}{2}$ par conséquent le triangle BCD est rectangle en C.

- d. Dédudons que les quatre points sont sur un même cercle.

Calculons $W = \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_C} \div \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$

D'après b) et c) on a : $W = -\frac{3}{2}$

W est non nul par conséquent les points A, B, C, D sont cocycliques. Les deux triangles ont la le segment BD en commun d'où le diamètre de ce cercle et donc le centre Ω est le milieu de ce segment.

$$Z_\Omega = \frac{Z_D + Z_B}{2} = 3 \text{ et } r = \Omega B = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Traçons le cercle sur la figure (voir figure ci-haut)

Exercice 3

Soit l'équation (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$

1. Résolvons l'équation (E) :

équation caractéristique $4r^2 + \pi^2 = 0$

$$r^2 = -\frac{\pi^2}{4} = \left(\frac{\pi}{2}i\right)^2 \Rightarrow r_1 = -\frac{\pi}{2}i \text{ et } r_2 = \frac{\pi}{2}i$$

La solution est donc sous la forme $y(x) = A \cos \frac{\pi}{2}x + B \sin \frac{\pi}{2}x$, A et B sont des réels.

2. Déterminons la solution g passant par le point N et admettant en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

$$y(1/2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad y'(1/2) = 0 \quad \text{d'où le système suivant :}$$

$$\begin{cases} -A \frac{\pi \sqrt{2}}{2} + B \frac{\pi \sqrt{2}}{2} = 0 \\ A \frac{\sqrt{2}}{2} + B \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A + B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases}$$

$$\underline{A = B = 1/2}$$

$$\text{D'où } g(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$$

3. Vérifions que pour tout x , $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4})$.

Multiplions et divisons l'expression de $g(x)$ obtenue en 2) par $\sqrt{2}$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2} x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} x) \quad \text{car } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{D'après les formules trigonométriques, } g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4}).$$

4. Calculons la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$G = \frac{1}{1-0} \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4}) dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\sin(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4}) \right]_0^1 = 2/\pi$$

$$\underline{G = 2/\pi}$$

Problème

Partie I

Soi la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 3x^3 - x - 2$

- a) Vérifions que $P(1) = 0$.

$$P(1) = 3 \times 1 - 1 - 2 = 0 \quad \text{relation vérifiée.}$$

- b) Déterminons les réels a , b , et c tels que, pour tout réel x : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
1 étant racine de P , faisons la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$

$$\frac{3x^3 - x - 2}{x - 1} = 3x^2 + 3x + 2 \quad \text{Par identification on a : } \underline{a = 3, b = 3 \text{ et } c = 2}$$

- c) Déterminons le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

$P(x) = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$ on a $3x^2 + 3x + 2 > 0$ car les coefficients des monômes sont positifs. Par conséquent le signe de $P(x)$ est celui de $(x - 1)$ donc

- Sur $]-\infty; 1[$ $P(x)$ est négatif
- Sur $]1; +\infty[$ $P(x)$ est positif

Partie II : Considérons la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2 \ln x$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

- a) Montrer que $g'(x) = \frac{P(x)}{x}$

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{P(x)}{x} \quad \text{relation vérifiée.}$$

- b) Etudions le sens de variation de g .

Le signe de la dérivée est celui de $P(x)$ donc :

- $\forall x \in]0; 1[$ $g'(x) < 0$; donc, g est décroissante sur $]0; 1[$;

- $\forall x \in]1; +\infty[$ $g'(x) > 0$; donc, g est croissante sur $]1; +\infty[$;
- c) Dédisons de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ de plus $g(1) = 1$ donc $g(x)$ est positive.

Partie III Considérons la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x+1 + \frac{x+\ln x}{x^2}$.

1.

- a) Déterminons $\lim f(x)$ quand x tend vers 0.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x^2} (x + \ln x) \right) = -\infty$$

- b) Montrons que $\frac{x+\ln x}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

$$\frac{x+\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$$

Dédisons la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$$

- c) Justifions que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x=0$ et $y=x+1$ sont asymptotes à la courbe (C).

f admet une limite infinie à droite en 0 donc la droite (D) d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\ln x}{x^2} = 0$ d'après e) on conclut donc que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à la courbe.

2.

- a) Montrons que la fonction h telle que : $h(x) = x+\ln x$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs négatives et positives.

Etude aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x) = +\infty$$

Branche infinie : on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

h admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=x$

Dérivée et sens de variation

La fonction est dérivable sur son domaine de définition et sa dérivée est $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[$ $h'(x) > 0$; donc, g est croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

- Sur $]0; \alpha[$ on a des valeurs négatives de h .
 - Sur $]\alpha; +\infty[$ on a des valeurs positives de h .
- b) Dédisons que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln \alpha = 0$ et montrons que $0,56 < \alpha < 0,57$.

$$y = f \Rightarrow x + 1 = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

$\Rightarrow x + \ln x = 0$ D'après la fonction h étudiée haut, ce point est unique et vérifie bien la relation $\alpha + \ln \alpha = 0$

$h(0,56) = -1,98 \cdot 10^{-2}$ et $h(0,57) = 7,88 \cdot 10^{-3}$ $h(0,56) \times h(0,57) < 0$ donc $0,56 < \alpha < 0,57$.

- c) Déterminons la position de (C) par rapport à (Δ) .

(C) et (Δ) se coupent en un point unique d'après b). d'après a) :

- Sur $]0; \alpha[$ on a des valeurs négatives donc (Δ) est au dessus de (C) .
- Sur $]\alpha; +\infty[$ on a des valeurs positives donc (C) est au dessus de (Δ) .

3. Etudions le sens de variation de f .

f est dérivable sur son domaine de définition et pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - x + 1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

$g(x)$ étant positive donc f est strictement croissante sur son D_f .

4. Dédire de 3. l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et varie de $-\infty$ à $+\infty$ donc il existe un réel β tel que $f(\beta) = 0$

Montrons que $0,46 < \beta < 0,47$.

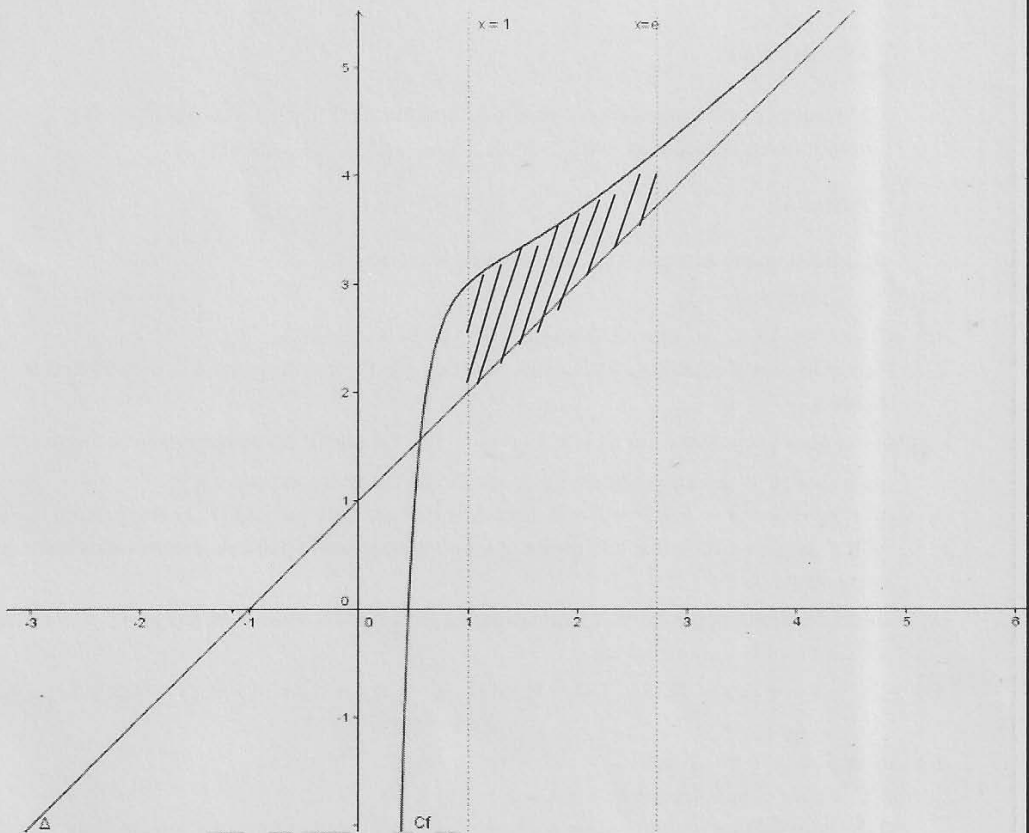
$f(0,46) = -3,610^{-2}$, $f(0,47) = 0,2$ on a $f(0,46) \times f(0,47) < 0$ donc β appartient à cet intervalle.

5. Construisons (C) et (Δ)

Tableau de variation

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Tracer (C) et (Δ)



6.

a) Calculons à l'aide d'une intégration par parties $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Posons $U = \ln x$ $U' = 1/x$ et $V' = 1/x^2$ $V = -1/x$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right] + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

b) Hachurons la région du plan comprise entre (C) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (voir figure ci-haut)

c) Calculer en cm^2 l'aire de cette région.

$$A = \left(\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx + \int_1^e \frac{1}{x} \right) u.a = 10,9 \text{ cm}^2 \quad \text{unite d'aire } 4 \text{ cm}^2$$