CORRECTIONDE MATHEMATIQUES, Séries F ET BT 2010

Exercice 1

a) Déterminons les racines carrées du nombre complexe $-\frac{33}{4} - 14i$

Posons $w = -\frac{33}{4} - 14i$ et determinons $z \,/\, z^2 = w$

$w = [\rho, \theta]$, $z = [r, \alpha]$

$$z^2 = w \Leftrightarrow [r^2, 2\alpha] = [\rho, \theta]$$

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{33}{4}\right)^2 + (-14)^2} = \frac{65}{4}$$

$Cos\theta = -\frac{33}{65}$ et $Sin\theta = -\frac{56}{65}; \theta \in]-\pi; 0]$

$$r^2 = \rho \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

$$2\alpha = \theta + 2k\pi \text{ , avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi, avec\ k = \{0; 1\}$$

Pour $k = 0; z_0 = \left[\frac{\sqrt{65}}{2}; \frac{\theta}{2}\right] = \frac{\sqrt{65}}{2}\left(Cos\frac{\theta}{2} + iSin\frac{\theta}{2}\right)$

Pour $k = 1; z_1 = \left[\frac{\sqrt{65}}{2}; \frac{\theta}{2} + \pi\right] = -\frac{\sqrt{65}}{2}\left(Cos\frac{\theta}{2} + iSin\frac{\theta}{2}\right)$

Donc les racines carrée de $-\frac{33}{4} - 14i$ sont $\boldsymbol{z_0 = 2 - \frac{7}{2}i}$ et $\boldsymbol{z_1 = -2 + \frac{7}{2}i}$

b) Résoudre l'équation $(1 + i)z^2 - (7 + 13i)z + 2 + 60i = 0$

$$\Delta = (7 + 13i)^2 - 4(1 + i)(2 + 60i) = 112 - 66i$$

$\Delta = [130, \varphi]$ avec $Cos\varphi = \frac{56}{65} = Cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ et $Sin\varphi = -\frac{33}{65} = Sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ où θ est l'angle de la question précédente.

Déterminons $u \,/\, u^2 = \Delta$

$u = [r, \alpha]$, alors $r^2 = 130\ et\ 2\alpha = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow r = \sqrt{130}\ et\ \alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k = \{0; 1\}$

$Cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Cos\frac{\theta}{2} - Sin\frac{\theta}{2}\right)$ et $Sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Sin\frac{\theta}{2} + Cos\frac{\theta}{2}\right)$

$u_0 = \sqrt{130}(Cos\alpha + iSin\alpha) = 11 - 3i$ et $u_1 = -u_0$

$$z_1 = \frac{-b + u_0}{2a} = \frac{7 + 13i + 11 - 3i}{2(1 + i)} = \frac{18 + 10i}{2(1 + i)} = \frac{9 + 5i}{1 + i} = 7 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-b - u_0}{2a} = \frac{7 + 13i - 11 + 3i}{2(1 + i)} = \frac{-4 + 16i}{2(1 + i)} = \frac{-2 + 8i}{1 + i} = 3 + 5i$$

Donc $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \{\boldsymbol{7 - 2i\,;\ 3 + 5i}\}$

Exercice 2

Calculons la dérivée première des fonctions suivantes :

a) $y = sin3x + cos2x$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y' = 3cos3x - 2sin2x}$$

b) $y = cotg(1 - 2x^2)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y' = -\frac{1}{sin^2(1 - 2x^2)} \times (-4x) = \frac{4x}{sin^2(1 - 2x^2)}}$$

c) $y = ln(x^3 + 2)(x^2 + 3)$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2}{x^3+2} \times (x^2+3) + 2xln(x^3+2) = \frac{3x^2(x^2+3)}{x^3+2} + 2xln(x^3+2)$$

d) $y = ln \sin 3x$

$$\Rightarrow y' = \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} = 3Cotg(3x)$$

e) $y = e^{x^2}$

$$\Rightarrow y = 2xe^{x^2}$$

Exercice 3 : Calcul des intégrales

a) $\int(1-x)\sqrt{x}dx = \int(\sqrt{x} - x\sqrt{x})dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$; avec $c \in \mathbb{R}$

b) $\int\frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int\frac{2}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$; avec $c \in \mathbb{R}$

c) $\int\frac{dx}{9x^2-16} = \int\frac{dx}{9x^2-16} = \int\frac{dx}{(3x-4)(3x+4)} = \int\frac{\frac{1}{8}}{3x-4}dx - \int\frac{\frac{1}{8}}{3x+4}dx$
$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\int\frac{3}{3x-4}dx - \frac{1}{3}\int\frac{3}{3x+4}dx\right) = \frac{1}{24}(\ln|3x-4| - \ln|3x+4|) + C$; avec $c \in \mathbb{R}$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{Sin2x} = I$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{Sin2x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(Cos^2 2x + Sin^2 2x)dx}{Sin2x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{Cos^2 2x}{Sin2x} + Sin2x\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{Cos^2 2x}{Sin2x}dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}Sin2x\,dx$$

Posons $u = Cos2x \Rightarrow u' = -2Sin2x$; $v' = \frac{Cos2x}{sin2x} \Rightarrow v = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{Sin^2 2x}$

Alors $I = \left[-\frac{Cos2x}{4Sin^2 2x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{Sin2x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}Sin2x\,dx = \left[-\frac{Cos2x}{4Sin^2 2x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}[Cos2x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dx$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}I = -\frac{1}{2}\left[Cos2x\left(1 + \frac{1}{2Sin^2 2x}\right)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left[-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\times\frac{3}{4}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\times\frac{1}{4}}\right)\right] \Leftrightarrow I = \frac{7}{9}$$

e) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{(x+1)dx}{x^2(x-1)} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\left(\frac{-1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x-1}\right)dx = \left[\frac{1}{x} - 2lnx + 2ln|x-1|\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = -\frac{8}{3} -$
$4ln3$

Exercice 4

1.

a) Calcul de la raison pour la chaine A

Comme les productions de la chaine A forment une suite arithmétique, alors

$$A_2 = A_1 + r_A \Rightarrow r_A = A_2 - A_1 = 2069 - 2056$$
$$r_A = 13$$

b) Raison de la suite pour la chaine B

$$B_2 = B + r_B \Rightarrow r_B = B_2 - B_1 = 1805 - 1770$$
$$r_B = 35$$

2. En supposant que $B = 2050$ déterminons le rang pour cette production

Nous sommes en présence d'une suite arithmétique alors on aura

$$B_n = B_1 + (n-1)r_B$$

$n = \frac{B_n - B_1}{r_B} + 1 = \frac{2050-1770}{35} + 1 = 9$ $\boldsymbol{n = 9}$

3.

a) Expression de A_n en fonction de n et A_1

$$\boldsymbol{A_n = A_1 + (n-1)r_A}$$

b) Expression de B_n en fonction de n et B_1

$$\boldsymbol{B_n = B_1 + (n-1)r_B}$$

Retrouvons le même résultat de la question

$$B_n = B_1 + (n-1)r_B$$

$$n = \frac{B_n - B_1}{r_B} + 1 = \frac{2050 - 1770}{35} + 1 = 9$$

Donc on retrouve le résultat de la question 2.

c) Date à partir de laquelle la production de la chaine B sera supérieure à celle de la chaine A.

Cette condition n'est réunie que si $B_n \geq A_n$; alors

$$B_1 + r_B(n-1) \geq A_1 + r_A(n-1) \Leftrightarrow 1770 + 35(n-1) \geq 2056 + 13(n-1) \Leftrightarrow n = \frac{308}{22} = 14$$

C'est donc à partir de Février 2010 que la production de la chaine B sera supérieure à celle de la chaine A.

Exercice 5

f est définie sur $]0;\ +\infty[$par $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

1. Etude des limites

a. Limite de f quand $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

b. Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = 0$$

2. Etude des variations de f

a. Montrons que $f'(x) = (2x+1)\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' + \left(\frac{1}{x^2}\right)'\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$= -\frac{2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}} = -(2x+1)\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$

Donc $\boldsymbol{f'(x) = -(2x+1)\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}}$

b.

- Signe de $f'(x)$ sur $]0;\ +\infty[$

$$f'(x) = -(2x+1)\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

Or $\forall x \in]0;\ +\infty[$, $(2x+1)\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} > 0$;donc $\boldsymbol{f'(x) < 0}$

- Tableau de variation sur $]0;\ +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

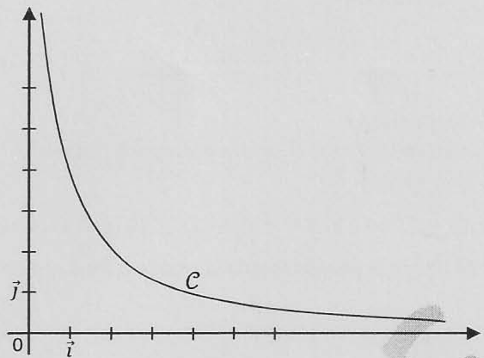
c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée $\alpha \in]0;\ +\infty[$.

D'après la question 2.b, f est continue et monotone strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$; donc f réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur $f(]0;\ +\infty[) =]0;\ +\infty[$, or $2 \in]0;\ +\infty[$ .Donc il existe un unique $\alpha \in]0;\ +\infty[\ /\ f(\alpha) = 2$.

3. Tracé de la courbe $\mathcal{C}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$; Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$; Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$



Partie B

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$

1. Calculons I_2

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_1^2 -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx - \left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = e - \sqrt{e}$$

Donc

$$\boldsymbol{I_2 = e - \sqrt{e}}$$

2.

a) Démontrons, que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$

$$I_{n+1} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left[-\frac{1}{x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 (n-1)\frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - (n-1)I_n = (1-n)I_n + \left[\frac{-e^{1/2}}{2^{n-1}} + \frac{e}{1}\right] \Rightarrow I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$

Donc pour tout entier naturel $\boldsymbol{n \geq 2}$, $\boldsymbol{I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n}$

b) Calcul de I_3

$$I_3 = I_{2+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

Donc $\boldsymbol{I_3 = \frac{1}{2}\sqrt{e}}$

3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n

a) Etablissons que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [1 ; 2]

$$0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$$

$$\forall\, x \in [1\,;\,2]\,,\quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$\Leftrightarrow \quad e^{1/2} \leq e^{1/x} \leq e$ (Car la fonction exp est croissante)

Or $\forall\, x \in [1; 2] et\ \forall\, n \geq 2; x^n > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^n} > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^n} e^{1/2} \leq \frac{1}{x^n} e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x^n}\sqrt{e} \leq \frac{1}{x^n} e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x^n} e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}$$

Donc pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

b) -Déduisons un encadrement de I_n

On a $\quad 0 \leq \frac{1}{x^n} e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq I_n \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}$$

- Etudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

On a: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} I_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} I_n \leq 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0}$