CORRECTIONDE MATHEMATIQUES, Séries F ET BT 2009

EXERCICE I

A. Ecrivons les cinq premiers termes des suites suivantes :

a) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}\right\}$

$$n=0\,;\left\{(-1)^{0+1}\frac{1}{3\times 0-1}\right\}=1\quad;$$

$n=1\,;\left\{(-1)^{1+1}\frac{1}{3\times 1-1}\right\}=\frac{1}{2}\,;$

$$n=2\,;\left\{(-1)^{2+1}\frac{1}{3\times 2-1}\right\}=\frac{-1}{5}\quad;$$

$$n=3\,;\left\{(-1)^{3+1}\frac{1}{3\times 3-1}\right\}=\frac{1}{8}$$

$n=4\,;\left\{(-1)^{4+1}\frac{1}{3\times 4-1}\right\}=\frac{-1}{11}$

b) $\left\{\frac{1}{2}[(-1)^n+1]\right\}$

$$n=0\,;\left\{\frac{1}{2}[(-1)^0+1]\right\}=1\quad;$$

$$n=1\,;\left\{\frac{1}{2}[(-1)^1+1]\right\}=0$$

$$n=2\,;\left\{\frac{1}{2}[(-1)^2+1]\right\}=1\quad;$$

$$n=3\,;\left\{\frac{1}{2}[(-1)^3+1]\right\}=0$$

$$n=4\,;\left\{\frac{1}{2}[(-1)^4+1]\right\}=1$$

B. Calculons les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+3}{x+2}$$

Donc $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{5}{4}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x+Sin2x}{x-Sin2x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x+Sin2x}{x-Sin2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+Sin2x}{2x}}{\frac{x-Sin2x}{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{Sin2x}{2x}\right)}{\frac{1}{2}-\left(\frac{Sin2x}{2x}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=-3$; car $\lim_{x\to 0}\frac{SinX}{X}=1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

C. Calculons les intégrales suivantes :

a) $\int(2x^2-5x+3)dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+K\ ,(K\in\mathbb{R})$

b) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int 3x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}+K'\,,(K'\in\mathbb{R})$

c) $\int_1^e lnxdx=[xlnx-x]_1^e=elne-e-1ln1+1=1$

www.touslesconcours.info

EXERCICE II

1. $U_n = \frac{V_n - 1}{V_n + 1}$, montrons que (U_n) est définie.

DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

Montrez que (U_n) est définie revient à montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n + 1 \neq 0$.

Soit P la propriété (U_n) est définie et P_n son hypothèse de récurrence définie par $P_n : V_n + 1 \neq 0$

- Pour $n = 0$, on a $V_0 + 1 = -2 + 1 = -1 \neq 0$ donc P_0 est vraie
- On suppose P_n vraie jusqu'au rang n ; i.e. : $P_n : V_n + 1 \neq 0$
- Montrons que P_{n+1} est aussi vraie :

  $V_{n+1} + 1 = \frac{2+V_n}{1+2V_n} + 1 = \frac{3(V_n+1)}{1+2V_n} \neq 0$, car $V_n + 1 \neq 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

  Donc $V_{n+1} + 1 \neq 0$ et par conséquent P_{n+1} est aussi vraie.

Conclusion :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n + 1 \neq 0$ et donc (U_n) est definie.

2. Montrons que la suite (U_n) est géométrique.

$$U_{n+1} = \frac{V_{n+1} - 1}{V_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2+V_{n-1}}{1+2V_{n-1}} - 1}{\frac{2+V_{n-1}}{1+2V_{n-1}} + 1} = \frac{-(V_n - 1)}{3(V_n + 1)} = -\frac{1}{3} U_n$$

Donc on a $U_{n+1} = -\frac{1}{3} U_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors (U_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = \frac{V_0 - 1}{V_0 + 1} = 3$.

3.

- Exprimons U_n en fonction de .

  $U_n = U_0 q^n = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

- Déduction de la convergence

  $|q| = \frac{1}{3} < 1$; Donc (U_n) converge.

4.

- Exprimons V_n en fonction de n

$$U_n = \frac{V_n - 1}{V_n + 1} \Leftrightarrow V_n = \frac{1 + U_n}{1 - U_n} = \frac{1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

- Déduction de la convergence de la suite (V_n)

  $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = 1$

  Donc (V_n) converge.

EXERCICE III

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'equation $z^2 + 4z + 16 = 0$

   $z^2 + 4z + 16 = 0$

   $\Delta = 4^2 - 4 \times 16 = -48 = \left(i4\sqrt{3}\right)^2$

www.tousleconcours.info

$z_1 = \frac{-4-i4\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-4+i4\sqrt{3}}{2}$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{-2 - i2\sqrt{3}\ ;\ -2 + i2\sqrt{3}\}$

2. $P(z) = z^3 - 64$

a) Calculons $P(4)$:

$P(4) = 4^3 - 64 = 0$

b) Trouvons a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-4)(az^2 + bz + c)$

- **Première méthode** : Utiliser l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$z^3 - 64 = z^3 - 4^3 = (z-4)(z^2 + 4z + 16)$$

On en déduit $a = 1\ ;\ b = 4\ et\ c = 16$.

- **Deuxième méthode** : Méthode dite par Identification

$(z-4)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c =$

$az^3 + z^2(b - 4a) + z(c - 4b) - 4c = z^3 - 64$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = 0 \\ 4c = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 16 \end{cases}$$

- **Troisième méthode** : Division Euclidienne

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 64 & z - 4 \\ \hline -(z^3 - 4z^2) & z^2 + 4z + 16 \\ \hline 4z^2 - 64 & \\ -(4z^2 - 16z) & \\ \hline 16z - 64 & \\ -(16z - 64) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On en déduit $a = 1\ ;\ b = 4\ et\ c = 16$.

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'equation $(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 - 64 \Leftrightarrow (z-4)(z^2 + 4z + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - 4 = 0\ \ ou\ \ z^2 + 4z + 16 = 0$$

D'après le résultat de la question 1. Et le résultat de 2.a) on en déduit

$$S_{\mathbb{C}} = \{4\ ;\ -2 - i2\sqrt{3}\ ;\ -2 + i2\sqrt{3}\}$$

3.

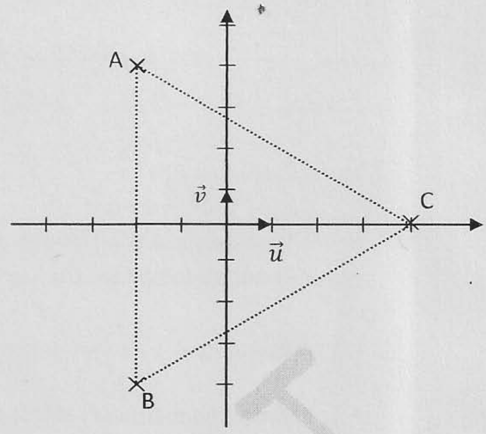
a) Etablissons que $z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$z_A = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(Cos\frac{2\pi}{3} + iSin\frac{2\pi}{3}\right) = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

b) Ecrivons $z_B = re^{i\theta}$

$z_B = \overline{z_A} = \overline{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

c) Plaçons les points dans le repère :



d) Nature du triangle ABC

On a : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{4-(-2+2i\sqrt{3})}{-2-2i\sqrt{3}-(-2+2i\sqrt{3})} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc ABC est un triangle équilatéral.

EXERCICE IV

1. Etude des limites en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{2} + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = 0 - \frac{5}{2} + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty - \frac{5}{2} + 0 = +\infty$$

2.

a)

- Calculons $f'(x)$.

$$f'(x) = e^x + \left(\frac{-e^x}{(e^x)^2}\right) = e^x - \frac{1}{e^x}$$

- Montrons que $f'(x) = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x}$

On a

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \frac{(e^x)^2 - 1^2}{e^x} = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x}$$

Donc on a bien $f'(x) = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x}$.

b) Etudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x}(e^x-1)$; Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui du terme $e^x - 1$ qui s'annule pour $x = 0$; on en déduit donc que :

$\forall\, x < 0\,, f'(x) < 0$

$\forall\, x > 0\,, f'(x) > 0$

et pour $x = 0, f'(x) = 0$

c) Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

www.touslesconcours.info

3.

a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$

$2X^2 - 5X + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 = 3^2$

$X_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2} ; 2\right\}$.

b) Montrons que $f(x) = 0$ équivaut à $2(e^x)^2 - 5e^x + 2 = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2e^x e^x - 5e^x + 2}{2e^x} = 0$

$\Leftrightarrow 2e^x e^x - 5e^x + 2 = 0$; car $e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 5e^x + 2 = 0$

Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 5e^x + 2 = 0$

c) En utilisant a), résolvons $f(x) = 0$

En posant $e^x = X$, on retrouve l'équation résolue en a) ; alors on a :

$$\begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -ln2 \\ e^x = 2 \Rightarrow x = ln2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S_{\mathbb{R}} = \{-ln2 ; ln2\}}$$

d) Abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

L'intersection de C_f avec l'axe des abscisses est donnée par l'équation $(x) = 0$.

Il s'agit donc des solutions trouvées en c) à savoir $-ln2$ *et* $ln2$.

e) En utilisant 2c) et 3d) , déterminons le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

D'après le tableau de variation en 2c) et les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses en 3d) on a :

$\forall\, x \in\ ]-\infty, -ln2[$ *et* $\forall\, x \in\ ]ln2, +\infty[\,, f(x) > 0$

$\forall\, x \in\ ]-ln2, ln2[\,, f(x) < 0$

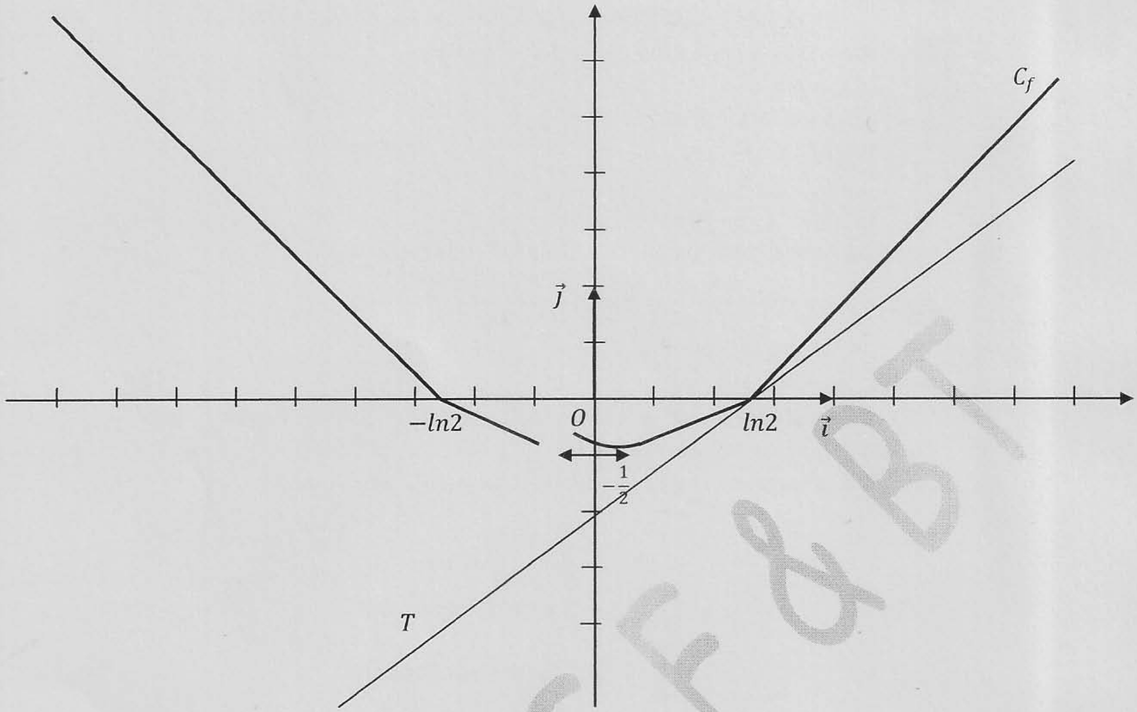
pour $x \in \{-ln2 ; ln2\}\,, f(x) = 0$.

4. Equation T de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 .

$T\colon\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{3}{2}(x - ln2)$

$$T\colon\ y = \frac{3}{2}(x - ln2)$$

5. Tracés de la courbe C_f et la droite T.



6.

a) Montrons que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = e^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{e^x} = f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Déduction de la valeur exacte de .

D'après ce qui précède (question 6.a) , $I = [F(x)]_{ln2}^{2}$

$$I = \left[e^2 - \frac{5}{2}\times 2 - \frac{1}{e^2}\right] - \left[e^{ln2} - \frac{5}{2}\times ln2 - \frac{1}{e^{ln2}}\right] = -\frac{13}{2} + \frac{5}{2}ln2 + \frac{e^4-1}{e^2}$$

Donc :

$$I = -\frac{13}{2} + \frac{5}{2}ln2 + \frac{e^4-1}{e^2}$$

LE GENIE F & BT