CORRECTION DE MATHEMATIQUES BACC CDE (GCE AL) 2012

Exercice 1

PARTIE A

1. Déterminons la probabilité p_1 pour qu'une disquette soit défectueuse et acceptée
   Notons **A** : l'évènement la disquette est Acceptée et **D** : l'évènement la disquette est défectueuse.
   $$P_{A/D} = \frac{(P_A \cap P_D) = p_1}{P_D} \Rightarrow \boldsymbol{p_1 = P_{A/D} \times P_D = 5\% \times 4\% = 0,002}$$
2. Déterminons la probabilité p_2 pour qu'une disquette soit bonne et refusée

   Notons **B** : l'évènement la disquette est bonne et **R** : l'évènement la disquette est refusée.
   $$P_{R/B} = \frac{(P_R \cap P_B) = p_2}{P_B} \Rightarrow \boldsymbol{p_2 = P_{R/B} \times P_B = 3\% \times 96\% = 0,029}$$
3. Déterminons la probabilité p_3 pour qu'il y ait une erreur de contrôle
   Il y'a erreur de contrôle si une disquette est défectueuse et acceptée ou alors si une disquette est bonne et refusée ; ainsi : $\boldsymbol{p_3 = p_1 + p_2 = 0,031}$

4. Montrer que la probabilité p_4 pour qu'une disquette soit acceptée est égale à 0,933.

Une disquette est acceptée si elle est bonne et accepté ou alors si elle est défectueuse et accepté ;ainsi $\boldsymbol{p_4 = p_1 + P_{A/B} \times P_B = 0,002 + 97\% \times 96\% = 0,933}$

PARTIE B :

Nous sommes ici en présence d'un schéma de Bernoulli à 5 épreuves, dont le succès est l'évènement « *la disquette est acceptée* ».

5. Déterminons la probabilité p_5 pour qu'une disquette soit démarquée
   Une disquette est démarqué, si elle échoue au test une seule fois ;ainsi $\boldsymbol{p_5 = C_5^4 {p_4}^4 (1 - p_4)^1 = 5 \times 0,933^4(1 - 0,933) = 0,254}$

6. Déterminons la probabilité p_6 pour qu'une disquette reçoive la marque de l'entreprise
   Une disquette reçoit la marque de l'entreprise si tous les 5 contrôles sont des succès ;ainsi :$\boldsymbol{p_6 = C_5^5 {p_4}^5 (1 - p_4)^0 = 1 \times 0,933^5 = 0,707}$
7. Quelle est la probabilité p_7 pour qu'une disquette soit détruite ?

Une disquette est détruite si elle n'est ni marquée, ni démarqué ;alors$\boldsymbol{p_7 = 1 - (p_5 + p_6) = 0,039}$

Exercice 2

E = $\{M(z) / |z - 1 - i| = \frac{1}{4}|z + i\bar{z} - 8(1 + i|)$

1. Soit P l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1}{2}(z - i\bar{z} + 8(1 + i))$
   a. Déterminons l'ensemble des points M tels que P(M) = M
      Désignons par Γ cet ensemble

$P(M) = M \Rightarrow z' = z$

$z = \frac{1}{2}(z - i\bar{z} + 8(1+i))$, en remplaçant z par x+iy et $\bar{z}$ par x- iy on obtient

$\frac{1}{2}(x+y) - 4 = 0$ soit $x + y - 8 = 0$

Donc Γ est la droite d'équation $\boldsymbol{x + y - 8 = 0}$

b. Montrons que pour tout point M les coordonnées de M' vérifient $x' + y' - 8 = 0$

On a : $z' = \frac{1}{2}(z - i\bar{z} + 8(1+i))$ en remplaçant z, z' et $\bar{z}$en fonction de x',y', x et y

On a : $x' + iy' - \frac{1}{2}(x+iy) + \frac{i}{2}(x - iy) - 4(1+i) = 0$

$$\Rightarrow x' - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 4 + i(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + y' - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x' - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 4 = 0 & (1) \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + y' - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$de\ (2), y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 4$

Or en ajoutant 4 et en retranchant le même nombre dans (1), on obtient :

(1) $x' \underbrace{- \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 4}_{y'} - 4 - 4 = 0$ donc $x' + y' - 8 = 0$

D'où **(D) :** $\boldsymbol{x' + y' - 8 = 0}$ et donc $\boldsymbol{M'}$ vérifie bien l'équation de **(D)**.

c. Montrons que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D).

Un vecteur directeur à (D) est le vecteur$\vec{u}\binom{-1}{1}$.

$\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\binom{x'-x}{y'-y}$

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x - x' + y' - y$$

Or P(M) = M $\Leftrightarrow M' = M \Rightarrow x' = x et y' = y$

Donc $\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0$ d'où $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à (D). **L'application P est une projection orthogonale des ponts M sur la droite (D).**

2. On se propose de déterminer l'ensemble E.

a. Montrons que $-z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z} - 8(1+i))$

$z - z' = z - \frac{1}{2}(z - i\bar{z} + 8(1+i) = z - \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} - \frac{8}{2}(1+i) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} - \frac{8}{2}(1+i)$

$= \frac{1}{2}(z + i\bar{z} - 8(1+i))$

D'où $\boldsymbol{-z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z} - 8(1+i))}$

b. Déduisons que E est une ellipse de foyer F et de génératrice (D) et d'excentricité e.

<u>Définition :</u> soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et e un nombre réel strictement positif. On appelle conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur (D). Si $e = 1$ parabole, $e < 1$ *ellipse*, $e > 1$ hyperbole.

Frappons la relation 2 a) par la valeur absolue et d'après la définition l'application E et la caractéristique géométrique de l'application P on a : $2|z-1-i| = |z-z'|$ soit $\frac{|z-(1+i)|}{|z-z'|} = {}^{1}/_{2}$ d'où E est une ellipse de foyer F d'affixe 1+i, de génératrice la droite (D) et d'excentricité e = ½. Soit la droite (Δ) passant par F et axe focal, (Δ) doit être ⊥ à (D) et donc son vecteur directeur $\vec{u}$ est un vecteur normal à (Δ). Soit M (x, y) ∈ à (Δ), alors $\vec{u}.\overrightarrow{FM}$=0

$\Rightarrow \binom{x-1}{y-1}.\binom{-1}{1} = 0$ D'où $1 - x + y - 1 = 0$

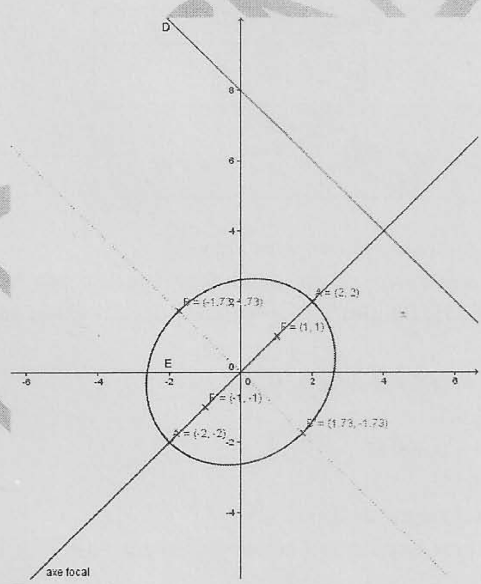
(Δ) : $y - x = 0$ Est l'axe focale de la conique.

c. Vérifions que A et A' d'affixes 2+2i et 2-2i sont deux sommets de E.

Les coordonnées vérifient bien l'équation de la droite (Δ) donc ils sont sommets de E.

3. Allure de E
   a. Construisons dans le repère (O ; $\vec{u}$;$\vec{v}$) la droite (D), l'axe focal, les points A, A', F. (voir figure ci-dessous)
   b. Déterminons géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.

      Les points B et B' sont les deux autres sommets de l'ellipse (intersections de la droite $y = -x$ et l'ellipse)
   c. Donnons l'allure de E. (voir figure ci-dessous)



PROBLEME

Considérons la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : f(x) $= \frac{2x}{1+x} - \ln(x+1)$

1. Etudions les limites aux bornes du domaine de définition
   - $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$

Posons X= x+1 $\Longrightarrow$ x=X-1, si x$\rightarrow -1^+$ alors X$\rightarrow 0^+$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(X-1) - X\ln X}{X}$$

$$= -\infty \text{ car } \lim_{x\to0^+} \frac{1}{X} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to0^+} XlnX = 0$$

D'où $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ la droite d'équation x= -1 est asymptote verticale.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$

  $= 2 - \infty = -\infty$

D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Direction asymptotique : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc f admet une branche parabolique de direction (ox).

2. Etudions les variations de f

f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x}\left(\frac{2}{1+x} - 1\right)$$

$= \frac{1-x}{(1+x)^2}$ D'où $f'(x) = \frac{(1-x)}{(1+x)^2}$

- Signe de $f'(x)$

  Le signe de la dérivée est celui du numérateur $\forall x \in]-1;+\infty[$

On a : $1 - x = 0 \Longrightarrow x = 1$ et $f(1) = 1 - ln2$

- Tableau de variation

x	**-1**	**1**	**$+\infty$**
$f'(x)$	+	$-$ 0	
$f(x)$	$-\infty$	0,31	$-\infty$

3. Démontrons que f(x)=0 admet une unique solution dans $]1;+\infty[$

En effet sur$]1;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc f réalise une bijection réciproque de $]1;+\infty[$ *vers* f($]1;+\infty[$)=$]-\infty;0,31[$. De plus $0 \in]-\infty;0,31[$ donc il existe un unique $\alpha \in]1;+\infty[$ tel que f$(\alpha) = 0$.

- Vérifions qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-1}est 3,9

$|\alpha - 3,9| \leq 10^{-1} \Longrightarrow -0,1 \leq \alpha - 3,9 \leq 0,1$

$3,8 \leq \alpha \leq 4$ or f(3,8) = 0,0153 et f(4) = - 0,0094

$f(3,8) \times f(4) < 0$ donc $|\alpha - 3,9| \leq 10^{-1}$

4. Précisons, suivant les valeurs de x, le signe de f(x).

Par un raisonnement analogue à la question précédente f admet également dans $]-1;1[$une unique solution β annulant la fonction.

- $\forall x \in]-1;\beta[\cup]\alpha;+\infty[$, f(x)< 0
- $\forall x \in]\beta;\alpha[$, f(x)> 0

PARTIE II

Considérons la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : g(0) =0 et g(t) = $\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si t>0

1. Démontrons que g est continue sur$[0; +\infty[$.

g(t) est continue sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions continues. Nous avons $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{t}\frac{\ln(1+t)}{t} = 0$ et g(0) = 0 et donc g est continue en 0 par conséquent g(t) est continue sur $[0; +\infty[$

Etudions la dérivabilité de g en 0.

Calcul de $\lim_{t\to 0+} \frac{g(t)-g(0)}{t-0}$

$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\ln(1+t)}{t} = +\infty$ car $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\lim_{t\to 0+} \frac{g(t)-g(0)}{t-0}$ est infinie d'où g n'est pas dérivable en 0.

2. Montrons que$g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}}f(t)$.

$$g'(t) = \frac{\frac{1}{1+t}\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\ln(1+t)}{t} = \frac{\frac{2t-(1+t)[\ln(1+t)]}{2\sqrt{t}(1+t)}}{t} = \frac{1}{2t\sqrt{t}}\frac{2t-(1+t)\ln(1+t)}{1+t}$$

Nous trouvons bien que $\boldsymbol{g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}}f(t)}$.

3. a) calculons la limite de g en +∞

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln t + \ln(1+\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 1$, faisons un changement de variable en posant u$=\frac{1}{t}$, u→ 0 si t→ +∞ et $\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \times u^{3/2} = 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$. la droite d'équation y = 0 est A.H

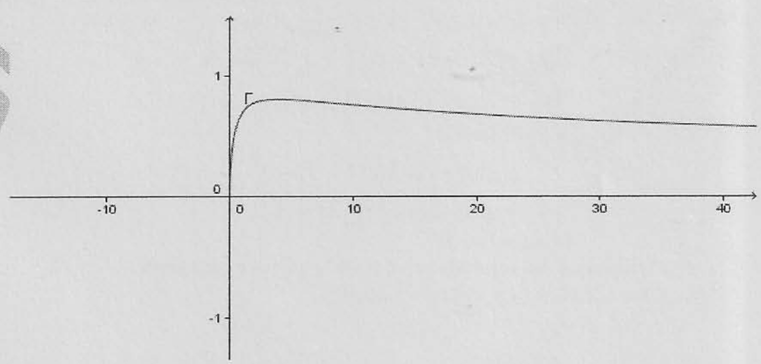
b) Dressons le tableau de variation de g

Le signe de la dérivée de g(x) est celle de f d'où le tableau ci-dessous

Tableau de variation

x	**0**	$\boldsymbol{\alpha}$	+∞
$\boldsymbol{f'(x)}$	+	− 0	
$\boldsymbol{f(x)}$	0 ↗	$\frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$ ↘	0

4. construisons la courbe (Γ) représentative.



PARTIE III

1. Soit la fonction g_1 définie sur $[0; +\infty[$par $g_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$

a. Démontrons que $g_1$est dérivable en 0.

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g_1(x)-g_1(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\ln(1+x)}{x} = 0$ et

$g'_1(0) = 0$ *donc* g_1 est dérivable en 0.

b. Soit la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$par $\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ Montrons que φ est dérivable en tout point de $[0;+\infty[$ et $\varphi'(x) = g(x)$

Nous venons de montrer en a) que $\sqrt{x}\ln(1+x)$ est dérivable en 0. Or elle est dérivable sur son domaine de dérivabilité $]0;+\infty[$ par conséquent dérivable sur $[0;+\infty[$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+x) - \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \left[\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\right]_0^x$$

$= \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+x)$ or $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ donc $\varphi'(x) = g(x)$

2. Déduisons que A= $2\ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

A= $\int_0^1 (g(x) - y(x))dx.U.A$ U.A unité d'aire

A= $\int_0^1 g(x)dx$

$=[\varphi(x)]_0^1$

$= 2\ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ d'où A= $2\ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt.$

3. Soit les fonctions h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ et k définie sur $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $k(\theta) = (\tan\theta)^2$

a. Calculons $(hok)(0)$

$(hok)(0) = h(k(o))$ or $k(0) = 0$ et $h(0) = \int_0^0 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt = 0$

Donc $(hok)(0) = 0$

b. Prouvons que pour tout $\in I$, $(hok)'(\theta) = 4(\tan\theta)^2$

$(hok)'(\theta) = k'(\theta)h'(k(\theta))$

On a : $k'(\theta) = 2(1+(\tan\theta)^2)\tan\theta$ et $h'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$

$$\Rightarrow k'(\theta)h'(k(\theta)) = 2(1+(\tan\theta)^2)\tan\theta.\frac{2.\sqrt{(\tan\theta)^2}}{1+(\tan\theta)^2}$$

$= 4(\tan\theta)^2$

Donc $(hok)'(\theta) = 4(\tan\theta)^2$

c. Déterminons une primitive de $(hok)'$ puis donnons l'expression de (hok).

$$\int (hok)'(\theta)d\theta = \int 4(\tan\theta)^2\,d\theta = 4(\int [((\tan\theta)^2+1)-1]d\theta$$

$= 4(\tan\theta - \theta)$

D'où une primitive de $(hok)'$ est $4(\tan\theta - \theta)$ +C, C∈ ℝ

$(hok) = \int (hok)'(\theta)d\theta$ et donc $(hok) = 4(\tan\theta - \theta)$ +C, C∈ ℝ

d. Calculons h(1)

$h(1) = \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ faisons une intégration par parties.

Posons $v(t) = \sqrt{t}$; $v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ *et* $u'(t) = \frac{1}{1+t}$; $u(t) = \ln(1+t)$

$h(1) = 2[\sqrt{t}\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt$

$= 2\ln2 - \int_0^1 g(t)dt$ or $\varphi'(t) = g(t)$

$= 2\ln2 - [\varphi(t)]_0^1$

$= 2\ln2 - \left[2\sqrt{t}\ln(1+t) - \int_0^t \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt\right]_0^1$

$= 2\ln2 - 2ln2 + \int_0^1 dt = 1$

Donc h(1) = 1

4. Déduisons des résultats précédents la valeur exacte de A.

A= $(2ln2 - 1) \times 10cm^2$=3,86cm^2