

CORRECTION DE MATHEMATIQUES BACC CDE (GCE AL) 2013

Exercice 1: (5pts)

1) Calculs des Probabilités

a) On note E_1 l'évènement « la distance parcourue sans incident est comprise entre 50 et 100 km »
 E_1 est l'évènement ($50 \leq D \leq 100$) dont la probabilité est $\int_{50}^{100} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx$

Posons $f(x) = \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}}$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F définie par : $F(x) = -e^{-\frac{x}{82}}$

D'où : $p(E_1) = F(100) - F(50) = -e^{-\frac{100}{82}} + e^{-\frac{50}{82}} \approx 0,248$ (0,5 pt)

Une valeur approchée au millième de **$p(E_1)$ est 0,248**

b) On note E_2 l'évènement « La distance parcourue sans incident est supérieure à 300 km ». E_2 est l'évènement ($D > 300$) dont l'évènement contraire est $\bar{E}_2 = (D \leq 300)$.

$$\begin{aligned} p(D > A) &= 1 - p(D \leq A) = 1 - \int_0^A \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx \\ &= 1 - (F(A) - F(0)) = 1 - \left(-e^{-\frac{A}{82}} + 1 \right) = -e^{-\frac{A}{82}} \end{aligned}$$

Rappelons que pour une variable continue, $p(D > A) = p(D \leq A)$. D'où :

$$p(E_2) = p(D > 300) = -e^{-\frac{300}{82}} \approx 0,026$$

$$p(D > 300) \approx 0,026 \text{ (0,5 pt)}$$

2) Probabilité conditionnelle

On veut calculer la probabilité pour que le l'autocar parcourt (350+25) km au moins sans incident sachant qu'il a déjà parcouru 350 km sans incident. On cherche la probabilité de l'évènement ($D \geq 375$) sachant que l'évènement ($D \geq 350$) est déjà réalisé.

$$p_{(D \geq 350)}(D \geq 375) = p_{(D \geq 350)}(D \geq 350 + 25) = p(D \geq 25) = -e^{-\frac{25}{82}} \approx 0,737 \text{ (1 pt)}$$

3) Distance parcourue sans incident

$$\text{c) Calcul de } I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = x \text{ et } v'(x) = \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} \\ u'(x) = 1 \text{ et } v(x) = -e^{-\frac{x}{82}} \end{cases} \text{ on a}$$

$$\int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{82}} \right]_0^A + \int_0^A e^{-\frac{x}{82}} dx = -A e^{-\frac{A}{82}} + \left[-82 e^{-\frac{x}{82}} \right]_0^A$$

$$I(A) = -A e^{-\frac{A}{82}} - 82 e^{-\frac{A}{82}} + 82 \quad (1pt)$$

$$\text{d) } \lim_{A \rightarrow \infty} I(A) = 82$$

4) Étude de la variable X_d

a) On reconnaît un schéma de Bernoulli.

On considère l'épreuve : « Un autocar parcourt d kilomètres au moins ».

Le succès lors d'une épreuve est de parcourir ces d kilomètres sans incident.

Notons p la probabilité du succès : $p = p(D \geq d) = e^{-\frac{d}{82}}$

La variable aléatoire X_d est égale au nombre de succès au cours des N_0 épreuves suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\frac{d}{82}}$

La variable aléatoire X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\frac{d}{82}}$

b) Espérance de X_d

Le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres est l'espérance de X_d c'est-à-dire $N_0 \times e^{-\frac{d}{82}}$, puisque X_d suit une loi binomiale de paramètre N_0 et $e^{-\frac{d}{82}}$

$$E(X_d) = N_0 \times e^{-\frac{d}{82}}$$

Exercice 2

$$F: M \rightarrow M'$$

$$z \rightarrow \frac{1}{2}z^2 - z$$

$$F(z) = \frac{1}{2}z^2 - z$$

$$t \in [-\pi; \pi], z(M) = e^{it}$$

$$1. \quad z(M) = \cos t + i \sin t$$

$$z' = z(M') = \frac{1}{2}(\cos t + i \sin t)^2 - (\cos t + i \sin t)$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 t + i \cos t \sin t - \frac{1}{2}\sin^2 t - \cos t - i \sin t$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) - \cos t + i(\cos t \sin t - \sin t)$$

$$z' = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t + i\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \sin t\right)$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$$

$$2. \quad x(-t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \Leftrightarrow x(t) = x(-t)$$

$$y(-t) = -\frac{1}{2}\sin 2t + \sin t \Leftrightarrow y(-t) = -y(t) \\ \Leftrightarrow z = x + iy$$

$$z(t) = x + iy \Rightarrow z(-t) = x - iy$$

$$\Leftrightarrow z(t) = |z(-t)|$$

$\Rightarrow (\Gamma)$ admet comme axe de symétrie l'axe des abscisses.

$$3. \quad x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t$$

$$x'(t) = -\sin 2t + \sin t = -2\cos t \sin t + \sin t$$

$$x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$$

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ ou } \cos t = \frac{1}{2} \text{ avec } t \in [0; \pi]$$

$$\sin t = 0 \rightarrow t = 0 \text{ ou } t = \pi$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{si } t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \sin t > 0 \text{ et } 1 - 2\cos t < 0$$

$\Rightarrow x(t)$ est croissante

$$4. \quad y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t$$

$$y'(t) = \cos 2t - \cos t = \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t = -1 + 2\cos^2 t - \cos t$$

$$y'(t) = 2\cos^2 t - \cos t - 1$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t - 1 = 0 \text{ ou } 1 + 2\cos t = 0 \text{ avec } t \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow \cos t = 1 \text{ ou } \cos t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{si } t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow \cos t - 1 < 0 \text{ et } 1 + 2\cos t \geq 0$$

$\Rightarrow y(t)$ est décroissante

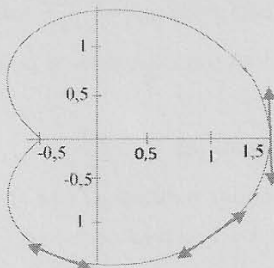
$$\text{si } t \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right] \Rightarrow \cos t - 1 < 0 \text{ et } (1 + 2\cos t) \leq 0$$

$\Rightarrow y(t)$ est croissante.

5. On obtient le tableau de variations :

t	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π				
x'(t)	0	-	0	+	$\sqrt{3}$	+	0	
x(t)	$-1/2$		$-3/4$	$1/4$		$3/2$		
y(t)	0		$-\sqrt{3}/4$	$-3\sqrt{3}/4$		0		
y'(t)	0	-	(-1)	-	0	+	-	2

6. On trace la restriction de Γ obtenue pour $t \in [0; \pi]$, puis on effectue la réflexion par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir toute la courbe



Exercice 3 :

1 -

a) Divisibilité de $3n^3 - 11n + 48$ par $n + 3$

On considère la fonction polynôme P définie sur l'ensemble des réels par :

$$P(x) = 3x^3 - 11x + 48$$

$P(-3) = 0$ donc on peut mettre $(x+3)$ en facteur de $P(x)$. on cherche donc trois réels a , b et c tels que, pour tout réel x , $P(x) = (ax^2 + bx + c)(x + 3)$. Après développement, on trouve $a = 3$, $b = -9$, et $c = 16$ d'où

$$P(x) = (3x^2 - 9x + 16)(x + 3) \text{ donc } 3n^3 - 11n + 48 \text{ par } n + 3$$

b) Nature de $3n^2 - 9n + 16$

$$3n^2 - 9n + 16 = 3(n^2 - 3n) + 16 \text{ or } n^2 - 3n \text{ est le début du carré de } (n - \frac{3}{2})$$

$$3n^2 - 9n + 16 = 3(n - \frac{3}{2})^2 - \frac{27}{4} + 16 = 3(n - \frac{3}{2})^2 + \frac{37}{4} > 0 \text{ donc}$$

$3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2 - Égalité de PGCD

Il suffit de montrer que $(a ; b)$ et $(bc - a ; b)$ ont les mêmes diviseurs communs.

Soit d un diviseur commun à a et b , il existe 2 entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$ on en déduit que : $bc - a = db'b' - da' = d(b'b' - a')$ où $b'b' - a'$ est un entier. d divise $bc - a$ c'est un diviseur commun de $bc - a$ et b .

Réciproquement soit d un diviseur commun à $bc - a$ et b , il existe 2 entiers c' et b' , tels que $bc - a = dc'$ et $b = db'$.

On en déduit que $a = bc - dc' = db'b' - dc' = d(b'b' - c')$ où $(b'b' - c')$ est un entier. d divise a et d est un diviseur commun à a et b .

$(a ; b)$ et $(bc - a ; b)$ ont les mêmes diviseurs communs donc le même PGCD.

3 - Montrons que $\text{PGCD}(3n^3 - 11n + 48 ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3)$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent : on choisit $a = 3n^3 - 11n$, $b = n + 3$ et $c = 3n^2 - 9n + 16$. on sait déjà que c est un entier naturel non nul. Enfin ; l'entier $3n^3 - 11n = n(3n^2 -$

$11)$ est strictement positif ssi $(3n^2 - 11) > 0$ ce qui équivaut à $n > \sqrt{\frac{11}{3}} \approx 1,91$.

$3n^3 - 11n > 0$ équivaut à ≥ 2 .

$bc - a = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16) - (3n^3 - 11n)$. d'après la question 1

$(n + 3)(3n^2 - 9n + 16) = 3n^3 - 11n + 48$ donc $bc - a = 48$

D'après la question 3 : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(bc - a ; b)$ c'est-à-dire lorsque $n \geq 2$,

$\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3)$.

4 -

a) Ensemble des diviseurs entiers naturels de 48

$$48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$$

48 a 10 diviseurs entiers naturels qui sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

b) Ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel

$n + 3$ étant un entier naturel, une condition nécessaire pour que $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ en soit un est que $3n^3 - 11n$ soit positif. C-a-d $n = 0$ ou $n \geq 2$.

Pour $n = 0$, $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} = 0$ est un entier naturel.

On suppose $n \geq 2$; $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ est un entier naturel ssi $(n + 3)$ divise $(3n^3 - 11n)$ ie si $\text{PGCD}(48 ; n + 3) = n + 3$; or $\text{PGCD}(48 ; n + 3) = n + 3$ ssi $n + 3$ divise 48.

Lorsque $n \geq 2$; $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ est un entier naturel si et seulement si $(n+3) \in \{6,8,12,16,24,48\}$ c'est-à-dire si $n \in \{3,5,9,13,21,45\}$
L'ensemble recherché est $\{0,3,5,9,13,21,45\}$.

Exercice 4

1) On a $U_1 = \frac{3}{2} > 0$. la propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons que pour un entier $k \geq 1$, on ait $U_k > 0$. alors

$U_{k+1} = U_k(1 + \frac{1}{2^{k+1}}) > 0$. La propriété est vraie pour $k+1$. On a donc démontré : $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $U_n > 0$.

2) Pour $n = 1$, on a $\ln U_1 = \ln(1 + \frac{1}{2})$: la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons que la propriété soit vraie pour k et montrons qu'elle est vraie pour $k+1$.

$$\begin{aligned}\ln(U_{k+1}) &= \ln(U_k) + \ln(1 + \frac{1}{2^{k+1}}) \\ &= \ln(1 + \frac{1}{2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{2^k}) + \ln(1 + \frac{1}{2^{k+1}})\end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3)

a) S_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$. On

$$a : S_n = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

T_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$. On

a :

$$T_n = \frac{\frac{1}{4} - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

b) Comme $\frac{1}{2} < 1$ et $\frac{1}{4} < 1$. on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{4})^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{3}$$

4) Appliquons l'encadrement supposé (que vous pourriez démontrer avec deux études de variation de fonction) avec $x - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2^2} \dots x - \frac{1}{2^n}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} &\leq \ln(1 + \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^2} &\leq \ln(1 + \frac{1}{2^2}) \leq \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^n} &\leq \ln(1 + \frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

5)

a) Les termes de la suite (U_n) sont strictement positifs et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$. La suite est donc strictement croissante .

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n - \frac{1}{2} T_n] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$. On déduit de la question 4) que, si la suite (U_n) converge vers l alors $\frac{5}{6} \leq l \leq 1$