CORRECTION DE MATHEMATIQUES BACC CDE (GCE AL) 2014

Exercice 2

Soit R_n l'évènement " l'étudiant est en retard le jour n"

$$P_n = p(R_n)\ ;\ q_n = p(\overline{R_n})\ ;\ P_1 = 0$$

Modélisons l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré :

1. Détermination d'une relation de récurrence

   a) probabilité conditionnelle $p_{R_n}(R_{n+1})$

R_{n+1} est l'évènement " l'étudiant est en retard le jour suivant sachant qu'il a été en retard le jour précédent "

D'après l'énoncé il est évident que $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$

   b) Déterminons $p(R_{n+1} \cap R_n) = f(P_n)\ et\ p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = f(q_n)$

   Par définition : $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{p(R_{n+1} \cap R_n)}{p(R_n)} \Rightarrow p(R_{n+1} \cap R_n) = p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n)$

D' oû $p(R_{n+1} \cap R_n) = \frac{1}{20} \times P_n$

De même, $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p(\overline{R_n}) = \frac{1}{5} \times q_n$

   c) Exprimons $P_{n+1} = f(P_n\ et\ q_n)$

Pour que l'étudiant soit en retard le jour $n+1$, il faudrait que : (il soit en retard le jour $n+1$ et en retard le jour n) ou (en retard le le jour $n+1\ et\ à\ l'heurele\ jour\ n$)

Ainsi

$$P_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_{n+1} \cap R_n) + p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$$

Donc : $\boldsymbol{P_{n+1} = \frac{1}{20} P_n + \frac{1}{5} q_n}$

   d) En déduire que $\boldsymbol{P_{n+1} = -\frac{3}{20} P_n + \frac{1}{5}}$

D'après ce qui précède $\boldsymbol{P_{n+1} = \frac{1}{20} P_n + \frac{1}{5} q_n}$ **; or** $\boldsymbol{q_n} = \overline{p_n} = 1 - P_n$

Et donc $\boldsymbol{P_{n+1}} = \frac{1}{20}\boldsymbol{P_n} + \frac{1}{5}(1 - P_n) = -\frac{3}{20}\boldsymbol{P_n} + \frac{1}{5}$

   On pose $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad v_n = P_n - \frac{4}{23}$

   a) Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{P_{n+1} - \frac{4}{23}}{P_n - \frac{4}{23}} = \frac{-\frac{3}{20}P_n + \frac{1}{5} - \frac{4}{23}}{P_n - \frac{4}{23}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{20}(P_n - \frac{4}{23})}{(P_n - \frac{4}{23})} = -\frac{3}{20}$$

   a) **Donc :** $\frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{3}{20}$**;** (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$

   b) **Exprimons** (v_n) puis $P_n = f(n)$

   $v_n = (-\frac{3}{20})^{n-1} V_1$ or $V_1 = p_1 - \frac{4}{23} = -\frac{7}{23} \Rightarrow \boldsymbol{v_n} = (-\frac{7}{23})(-\frac{3}{20})^{n-1}$

   Et donc $\boldsymbol{P_n} = ((-\frac{3}{20})^{n-1} - \boldsymbol{1})\ (-\frac{7}{23})$

c) Justifions que (P_n) **converge et calculons sa limite**

$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n} = \mathbf{0} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{p_n} = \frac{4}{23}$; donc (P_n) **converge**

Exercice 3

Soient $a = 1,\ b = e^{i\frac{\pi}{3}}\ ; c = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ; d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1.

a) Forme exponentielle de c et algébrique de d

$$c = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

b) Représentation des points

c) Montrons que le quadrilatère AOCD est un losange

il suffit de montrer que $\begin{cases} OB = AC = OA = BC \\ Mes\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$Mes\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{OC}\right) = \arg\left(\frac{Z_C - Z_O}{Z_A - Z_B}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{-2ie^{i\frac{\pi}{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = qrg\left(\frac{-1}{i}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, $OB = |Z_B| = 1$; $AC = |Z_C - Z_A| = \left|\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

De même $BC = |Z_C - Z_B| = 1$ et $OA = |Z_A| = 1$

D'où $\begin{cases} OB = AC = OA = BC \\ Mes\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Longrightarrow OABC$ est un losange.

2. Montrons que les points D, A et C sont alignés

$$Mes\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_A - Z_D}\right)\right) = \arg\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}}\right) = \arg\left(2\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right) = \arg(2) = 0$$

$Mes\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Longrightarrow D, A\ et\ C$ sont alignés

3. Déterminons l'angle et le rapport de la similitude s qui transforme A en C

L'écriture complexe de cette similitude est de la forme : $z' = az + b$

$$\begin{cases} s(A) = C \\ s(O) = O \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_C = az_A + b \\ z_O = az_O + b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

L'angle de la similitude est donc $\theta = \frac{\pi}{6}$ et son rapport $k = \sqrt{3}$

4. Montrons que les points F, C et G sont alignés

D'après ce qui précède, les points D, A et C sont alignés $\Longrightarrow$ les points $s(D) = F, s(A) = C$ et $s(C) = G$ sont aussi alignés, car les similitudes conservent l'alignement des points.

5. Déterminons l'affixe de F

$s(D) = F \Longrightarrow z_F = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_D = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i0} = \frac{3}{2}$; donc $f = \frac{3}{2}$

6.

Soit $\varphi : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit $r : M_1(z_1) \longmapsto M_1'(z_1')/\ z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de r.

r est de la forme $z' = az + b\ avec\ a = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \epsilon\ \mathbb{C} - \mathbb{R}\ tel\ que\ |a| = 1\ \ et\ b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \epsilon\ \mathbb{C}$. Donc r est une rotation d'angle $\theta = \arg(a) = -\frac{2\pi}{3}$. L'affixe de son centre est tel que :

$$z_\Omega = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = 1 = z_A \quad \Rightarrow\ \Omega = A$$

b) Donnons $Mes\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}\right)$

$$Mes\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A}\right) = \arg\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1}{-1} = -\frac{\pi}{3}$$

Déterminons $\Delta /\ r = \sigma_\Delta 0\ \sigma_{(OA)}$

Δ est telle que $\begin{cases} (OA) \cap (\Delta) = \{\Omega\} \\ \forall\ \vec{u}\ \in (\Delta), Mes\left(\overrightarrow{OA}, \vec{u}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow\ (\Delta) = (AB)$

Montrons que $\varphi = r\ 0\ \sigma_{(OA)}$ et déduisons la nature de φ.

Il suffit de montrer que $\begin{cases} \sigma_{(OA)}\ 0\ \ r(M) = M' \\ \varphi(M) = M'\ \forall\ M, M'\ du\ plan \end{cases}$

$r(M) = M_1 \Rightarrow\ z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; nous pouvons déduire de cette expression l' expression analytique de r qui est de la forme : $(S)\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$ avec $z_1' = x_1 + iy_1\ et\ z = x + iy$

D' où $\sigma_{(OA)}(M_1) = M'\ \ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x' \\ y_1 = -y' \end{cases}$. En remplaçant $x_1\ et\ x_1$ par leurs expressions dans (S) il vient :

$$(S)\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ -y' = -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Et donc $x' + iy' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} + i\left(\frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x - iy) + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Soit $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **(1)**

$\varphi(M) = M'\ \Leftrightarrow\ z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **(2)**

$$\mathbf{(2) = (1)\ \Leftrightarrow\ \varphi = r\ 0\ \sigma_{(OA)}}$$

Nature de φ : φ est une similitude indirecte.

Exercice 4

Soit (E): $\cos x = x^2\quad et\ f(x) = x^2 - \cos x$

1. Parité de f

   $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, -x\ \epsilon\ \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) = x^2 - \cos x = f(x)$

   Donc f est paire

2. Montrons que $\forall\ x\ > \pi, f(x) > 0$

$$\forall\ x\ > \pi, \begin{cases} x^2 > \pi^2 \\ \pi^2 > \cos x \end{cases} \Rightarrow x^2 > \cos x$$

$$\Rightarrow x^2 - \cos x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

3. Calculons $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) et\, f''(x)$

   F est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a : $\begin{cases} f'(x) = 2x + \sin x \\ f''(x) = 2 + \cos x \end{cases}$

4. Sens de variations de f'

   $\forall\, x \in \mathbb{R}, \cos x \geq -1 \Rightarrow 2 + \cos x = f''(x) > 0$ .Donc f' est strictement croissante sur $[0;\pi]$

5. Calculons $f'(0)$ et déduisons le signe de $f'(x)$

   $f'(0) = 0\ et\ f'$ est strictement croissante sur $[0;\pi]$.Donc $\forall\, x \in [0;\pi]\ f'(x) > 0$.

6. Sens de variation de f

   $\forall\, x \in [0;\pi]\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[0;\pi]$

7. Montrons que (E) admet une solution unique sur $[0;\pi]$

   $\forall\, x \in [0;\pi]$ f est continue et strictement croissante, par conséquent réalise une bijection de $[0;\pi]$ vers $f([0;\pi]) = [-1;\pi^2 - 1]$. De plus $0 \in [-1;\pi^2 - 1]$, par conséquent (E) admet une unique solution α sur $[0;\pi]$.

8. Valeur approchée de α à $10^{-2}\ près$

   $f(0.9) \times f(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in [0.9\,;1]$.

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{1 + 0.9}{2} \approx 0.05}$$

9. Déduisons toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$

α est solution de (E) $\Rightarrow -\alpha$ est aussi solution de (E) car f est paire. Donc $\boldsymbol{S_{\mathbb{R}}} = \{\boldsymbol{\alpha}; -\boldsymbol{\alpha}\}$