CORRECTION EPREUVE DE MATHEMATIQUES BACC CDE (GCE AL) 2011

EXERCICE I

PARTIE A

1) Calculons $u_1 et u_2$.

L'année 2007 , le nombre d'étudiants de l'école a augmenté de 10% ajouté à cela les 200 places disponibles ;alors $u_1 = 1{,}1u_0 + 200 = 310$ *étudiants*

De même $u_2 = 1{,}1u_1 + 200 = 541$ *étudiants*

2) Justifions que, pour tout entier naturel n,$u_{n+1} = 1{,}1u_n + 200$

Chaque année le nombre d'étudiants augmente de 10% ; à cela il faut ajouter les 200 places disponibles chaque année ; ainsi pour une année n, si u_n est le nombre d'étudiants, pour l'année $n+1$, on aura $u_{n+1} = 1{,}1u_n + 200$

Ainsi donc : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} = 1,1u_n + 200}$

3)

a) Calculons v_0.

On a : $v_n = u_n + 2000$

Pour $n = 0$, $v_0 = u_0 + 2000 = 100 + 2000 = 2100$

$$\boldsymbol{v_0 = 2100}$$

b) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2000 = (1{,}1u_n + 200) + 2000 = 1{,}1(u_n + 2000) = 1{,}1v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1{,}1$ et de premier terme $v_0 = 2100$.

c) Exprimons v_n en fonction de n; puis déduisons-en u_n

$$\boldsymbol{v_n = v_0 q^n = 2100 \times 1,1^n}$$

Par ailleurs $v_n = u_n + 2000$; ainsi $\boldsymbol{u_n = -2000 + 2100 \times 1,1^n}$

d) Calculons la limite de la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-2000 + 2100 \times 1,1^n) = +\infty}$$

e) Pouvons-nous avoir un effectif stable dans cette école ?

D'après la question 3) d), $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,alors nous n'aurons jamais un effectif stable dans l'école.

PARTIE B

1) Déterminons le nombre d'étudiants dans la faculté en octobre 2035 ;

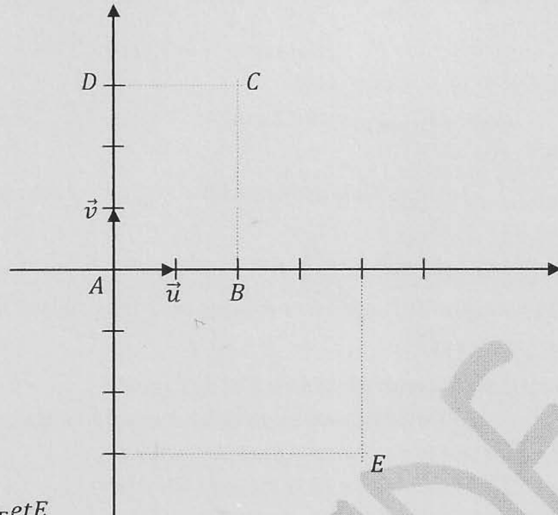
$$2035 = 2006 + N \Rightarrow N = 2035 - 2006 = 29$$

$$\boldsymbol{u_{29}} = -2000 + 2100 \times 1{,}1^{29} = 31312{,}5 \approx \mathbf{31313}\ \boldsymbol{\acute{e}tudiants}$$

Dont, il y aura 31313 é*tudiants* en Octobre 2035

2) Et 3) Il est difficile de donner ici une appréciation du nombre d'ingénieurs formé par an car le modèle étudié ne fait aucune hypothèse sur la question. On pourrait cependant donner un aperçu du nombre de promotions d'ingénieurs formé en Octobre 2035,car en effet toutes cinq années, une promotion est sensé sortir ;chose également non prise en compte par le modèle.

EXERCICE II



1. Déterminons l'affixe$z_E et E$

$$E = t_{\overrightarrow{DB}}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

Donc $\boldsymbol{z_E = 4\vec{u} - 3\vec{v}}$

2. Déterminons les nombres réels a, b tels que le point F soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.

On a $aFA + bFB + FC = 0 \Leftrightarrow a(-6+i) + b(-6+i+2) + (-6+i+2+3i) = 0 + i0$

$$\Leftrightarrow a(-6+i) + b(-4+i) + (-4+4i) = 0 + i0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 4b - 4 = 0 \\ a + b + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -2 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -10 \end{cases}$$

Donc : $\boldsymbol{a = 6 \text{ et } b = -10}$

3.

a) Exprimons z' en fonction de z

$$z' = f(z) = az + b$$

$$z_E = az_A + b$$

$$z_F = az_B + b$$

$$z_E - z_F = a(z_A - z_B)$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3i - (6 - i) = a(0 - 2)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a = 1 + i}$$

$$b = z_E$$

Alors

$$\boldsymbol{z' = (1+i)z + (4-3i)}$$

b) Déterminons le centre I, l'angle et le rapport de la similitude.

$$z_I' = z_I \Leftrightarrow (1+i)z_I + (4-3i) = z_I \Leftrightarrow \boldsymbol{z_I = 3 + 4i}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\alpha \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{k = |1+i| = \sqrt{2}}$$

c) Déterminer les images de C et de D par s.

$$z_C' = (1+i)z_C + (4-3i) = (1+i)(2+3i) + (4-3i) = 3 + 2i$$

$$z_D' = (1+i)z_D + (4-3i) = (1+i)(3i) + (4-3i) = 1$$

Donc les images de C et de D par sont les points d'affixes respectifs $\boldsymbol{3 + 2i}$ *et* $\boldsymbol{1}$.

d) Calculons l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.

$$\mathcal{A}_{s(ABCD)} = k\mathcal{A}_{(ABCD)} = \sqrt{2} \times (2 \times 3) \times u.a$$

Or $u.a = 1cm \times 1cm = 1cm^2$

Donc $\boldsymbol{\mathcal{A}_{s(ABCD)} = 6\sqrt{2}\ cm^2}$

4.

a) Déterminons l'ensemble (Ω) des points M du plan tels que $\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9$

On a : $\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9$

En introduisant le barycentre F, nous obtenons : $\|6\overrightarrow{MF} + 6\overrightarrow{FA} - 10\overrightarrow{MF} - 10\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC}\| = 9 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MF}\| = 3$

Donc (Ω) *est le cercle de centre F et de rayon 3.*

b) Déterminons en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de (Ω) par s.

$s(\Omega)$ *est le cercle de centre* $s(\mathrm{F})$ *et de rayon* $k \times r$

$$z_F' = (1+i)z_F + (4-3i) = (1+i)(6-i) + (4-3i) = 11 + 2i$$

$$k \times r = 3\sqrt{2}$$

Donc $\boldsymbol{s(\Omega)}$ ***est le cercle de centre le point d'affixe*** $\boldsymbol{11 + 2i}$ ***et de rayon*** $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

PROBLEME

PARTIE I

1) Etudions les variations de g_n

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$$

g est continue et derivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et derivables sur $]0;+\infty[$; et on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0;+\infty[\,, g_n'(x) = 1 + \frac{n}{2x}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0;+\infty[\,, g_n'(x) = 1 + \frac{n}{2x} > 0$, donc g_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} g_n(x) = -\infty}$ **et** $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} g_n(x) = +\infty}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g_n'(x)$	$+$
g_n	$-\infty \nearrow +\infty$

2)

a) Déduisons-en l'existence d'un unique réel positif tel que $g_n(\alpha_n) = 0$

D'après la question 1) précédente, g_n est monotone strictement croissante sur $]0;+\infty[$; elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$, or $0 \in]-\infty;+\infty[$, il existe donc un unique $\alpha_n \in]0;+\infty[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

b) Montrons que $1 \le \alpha_n \le e^2$

$g_n(1) = 1 - n \le 0$ et $g_n(e^2) = e^2 - n + \frac{n}{2} \times 2 = e^2 > 0$; g_n etant strictement croissante,on a donc $1 \le \alpha_n \le e^2$.

c)

- Montrons que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$

$$g_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n - n + \frac{n}{2} ln\alpha_n = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2} ln\alpha_n = n - \alpha_n \Leftrightarrow ln\alpha_n = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$$

Donc : $\boldsymbol{ln\alpha_n = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n}$

- Exprimons $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n

$$g_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - (n+1) + \frac{(n+1)}{2} ln\alpha_n = \alpha_n - (n+1) + \frac{(n+1)}{2}\left(2 - \frac{2}{n}\alpha_n\right)$$
$$= \alpha_n - (n+1) + (n+1) - \frac{n+1}{n}\alpha_n = -\frac{1}{n}\alpha_n$$

Donc : $\boldsymbol{g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n}$

- Déduisons en que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

D'après ce qui précède, on a : $g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n$ et d'apres la question 1) g_{n+1} est croissante.
Par ailleurs d'après 2.a) $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$.
Alors $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) > g_{n+1}(\alpha_n)$ et donc $\boldsymbol{\alpha_{n+1} > \alpha_n}$

3)

a) Montrons que la suite de terme général α_n est convergente.

D'après 2.c), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ et donc (α_n) est croissante ; par ailleurs d'apres 2.b) $1 \leq \alpha_n \leq e^2$ et donc (α_n) est majorée par e^2.
Alors (α_n) est convergente et converge vers L.

b) Calculons $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$ et déduisons-en L.

D'après 2.c), $ln\alpha_n = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$;
On a donc $\lim_{n\to+\infty} ln\alpha_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{2}{n}\alpha_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{2}{n}e^2\right) = 2$ (d'apres 2.b)
Donc $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} ln\alpha_n = 2}$

➢ Déduction de L

D'après ce qui précède, on a : $\lim_{n\to+\infty} ln\alpha_n = 2$; alors $ln(\lim_{n\to+\infty}\alpha_n) = 2 \Leftrightarrow e^{ln(\lim_{n\to+\infty}\alpha_n)} = e^2 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\alpha_n = L = e^2$

Donc : $\boldsymbol{L = e^2}$.

PARTIE II :

1. Déterminons les limites de f en 0 et en $+\infty$. Puis calculons $f'(x)$ et vérifions que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left[\frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{lnx}{2\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to0}\left[\sqrt{x} - lnx \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{lnx}{2\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x} - \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right] = +\infty$$

Donc :
$\boldsymbol{\lim_{x\to0} f(x) = +\infty}$ et $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

➢ Calculons $f'(x)$ et vérifions que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)(2\sqrt{x}) - (2x - lnx)\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{4\sqrt{x} - 2\frac{\sqrt{x}}{x} - 2\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{lnx}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{lnx}{4x\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{lnx}{4x\sqrt{x}} = \frac{x}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}lnx}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(x - 1 + \frac{1}{2}lnx\right) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$$

Donc :

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}}$$

PARTIE III

1.

a) Calculons $\int_1^2 \frac{lnx}{2\sqrt{x}}dx$ à l'aide d'une intégration par parties

$$\int_1^2 \frac{lnx}{2\sqrt{x}}dx = [lnx \times \sqrt{x}]_1^2 - \int_1^2 \sqrt{x} \times \frac{1}{x}dx = [lnx \times \sqrt{x}]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = [lnx \times \sqrt{x}]_1^2 - \frac{1}{2}[\sqrt{x}]_1^2$$

$$= ln2 \times \sqrt{2} - \frac{1}{2}[\sqrt{2} - 1]$$

Donc $\boldsymbol{\int_1^2 \frac{lnx}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{2}ln2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)}$

b) Deduisons-en J

$$J = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{2x - lnx}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{2x}{2\sqrt{x}}dx - \int_1^2 \frac{lnx}{2\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{lnx}{2\sqrt{x}}dx$$

Or d'apres 1 .a) $\int_1^2 \frac{lnx}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{2}ln2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$;

Alors $J = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \left(\sqrt{2}ln2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\right) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) - \left(\sqrt{2}ln2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\right) = \frac{11\sqrt{2}}{6} - \frac{7}{6} - \sqrt{2}ln2$

$$\boldsymbol{J = \frac{11\sqrt{2}}{6} - \frac{7}{6} - \sqrt{2}ln2}$$

2. Montrons que : $\frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

On a : $0 \leq k \leq n - 1$.

$1 + \frac{k}{n}$ et $1 + \frac{k+1}{n} \in [1; +\infty[$;alors $\forall\, x/\ 1 + \frac{k}{n} \leq x \leq 1 + \frac{k+1}{n}$

On a : $f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ car f est croissante sur et En utilisant les variations de f sur $[1; +\infty[$ .En intégrant membre en membre les termes de l'inégalité $f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ sur x entre $1 + \frac{k}{n}$ et $1 + \frac{k+1}{n}$ et par croissance de l'intégrale ,on obtient :

$$\boldsymbol{\frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)}$$

3. Déduisons-en que $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$, puis : $J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

- $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$

D'apres la question 2. On a : $\frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

En sommant membre en membre les termes de cette inégalité entre $k = 0$ et $k = n - 1$,on obtient :

$$\sum_0^{n-1}\frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \sum_0^{n-1}\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \sum_0^{n-1}\frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

Or

$$\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=U_n-\frac{1}{n}f\left(1+\frac{n}{n}\right)=U_n-\frac{1}{n}f(2)$$

$$\sum_{0}^{n-1}\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx=J$$

et

$$\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)=U_n-\frac{1}{n}f\left(1+\frac{-1+1}{n}\right)=U_n-\frac{1}{n}f(1)$$

on obtient donc

$$\boldsymbol{U_n-\frac{f(2)}{n}\leq J\leq U_n-\frac{f(1)}{n}}$$

- $J+\frac{f(1)}{n}\leq U_n\leq J+\frac{f(2)}{n}$

On a : $U_n-\frac{f(2)}{n}\leq J\leq U_n-\frac{f(1)}{n}$

En multipliant chaque membre de cette inégalité par -1, on obtient : $-U_n+\frac{f(1)}{n}\leq -J\leq -U_n+\frac{f(2)}{n}$ et en ajoutant U_n+J à chaque membre de cette inégalité on obtient donc :

$$\boldsymbol{J+\frac{f(1)}{n}\leq U_n\leq J+\frac{f(2)}{n}}$$

- $\lim_{n\to+\infty} U_n$

On a : $J+\frac{f(1)}{n}\leq U_n\leq J+\frac{f(2)}{n}$ et $J=\frac{11\sqrt{2}}{6}-\frac{7}{6}-\sqrt{2}ln2$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(J+\frac{f(1)}{n}\right)\leq\lim_{n\to+\infty}U_n\leq\lim_{n\to+\infty}\left(J+\frac{f(2)}{n}\right)$$
$$\Leftrightarrow J\leq\lim_{n\to+\infty}U_n\leq J$$

Par le théorème de comparaisons, on en déduit que $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}U_n=J=\frac{11\sqrt{2}}{6}-\frac{7}{6}-\sqrt{2}ln2}$