

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES, Séries C, D, E ET GCE A-LEVEL 2010

Exercice 1

I. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$ et $y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt$.

1.

a) Montrons que (x_n) est à termes positifs et étudions ses variations

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$$

On a $\forall t \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t^n \cos t \geq 0$ et par positivité de l'intégrale $0 \leq \int_0^1 t^n \cos t dt$. Donc (x_n) est à termes positifs.

$\forall t \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^n (t-1) \cos t dt$; Or $\forall t \in [0; 1]$, $t-1 \leq 0$, puisque $t^n \cos t \geq 0$, alors $t^n (t-1) \cos t \leq 0$ et par positivité de l'intégrale $\int_0^1 t^n (t-1) \cos t dt \leq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n \leq 0$. On en conclut que (x_n) est décroissante

b) Dédudition sur la convergence

D'après la question 1.a, (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

2. Démontrons que pour tout entier n , $x_n \leq 1/(n+1)$ et en déduire la limite de la suite (x_n)

$\forall t \in [0; 1]$, $\cos t \leq 1$;

$\forall t \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t^n \geq 0$ et donc $t^n \cos t \leq t^n$

Alors en passant à l'intégrale on obtient par positivité de cette dernière $\int_0^1 t^n \cos t dt \leq \int_0^1 t^n dt \Leftrightarrow$

$$x_n \leq \frac{1}{n+1} [t^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc $x_n \leq \frac{1}{n+1}$

Puisque $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par le théorème des gendarmes on en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

3.

a) Démontrons que pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t dt = [t^{n+1} \sin t]_0^1 - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t dt = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b) Dédudisons-en que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

$$y_n = \left(-\frac{1}{n+1}\right)(x_{n+1} - \sin(1))$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 0$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

4. Déterminons $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} ny_n$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} [-(n+1)y_n + \sin(1)] = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n y_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \sin(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n y_n = \sin(1)$$

De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n = \cos(1)$

II. Résolvons l'équation (E): $f'(x) = 1 + f(-x)$ et recherchons une solution particulière à l'équation complète

$f'(x) = 1 + f(-x) \Leftrightarrow f'(-x) = 1 + f(x)$ (1) ; en considérant que f est 2 fois dérivable, on peut écrire en dérivant membre en membre notre équation que $f'(x) = 1 + f(-x) \Rightarrow f''(x) = -f'(-x) \Rightarrow f'(-x) = -f''(x)$ (2)

En remplaçant (1) dans (2), on obtient $f'(x) = 1 + f(-x) \Rightarrow f''(x) + f(x) = -1$

Donc toute solution de $f'(x) = 1 + f(-x)$ est solution de $f''(x) + f(x) = -1$. Résoudre (E) revient donc à résoudre $f''(x) + f(x) = -1$ et à chercher parmi ses solutions celles qui sont solutions de (E).

Résolution de $y'' + y = -1$

Equation caractéristique homogène : $r^2 + 1 = 0$; alors $r = \pm i$

Solution de l'équation différentielle homogène associée : $y_1 = e^{ax}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) = A\cos x + B\sin x$, où A et B décrivent $\mathbb{R}$

Solution particulière de $y'' + y = -1$: On cherche la solution particulière sous la forme du second membre ; donc $y_0 = C$, $C \in \mathbb{R}$. On trouve $C = -1$.

Alors $y = y_1 + y_0 = A\cos x + B\sin x - 1$, où A et B décrivent $\mathbb{R}$

Recherchons donc les solutions de (E). Il s'agit de trouver l'ensemble des fonctions f de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x - 1$ qui satisfont la relation $f'(x) = 1 + f(-x)$.

$f'(x) = -A\sin x + B\cos x$ et $f(-x) = A\cos x - B\sin x - 1$; on obtient l'égalité $A = B$

Conclusion : La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto f(x) = A(\cos x + \sin x) - 1$ où $A \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière : Il suffit de prendre $A = 0$ et on trouve $f_p(x) = -1$

Exercice 2

Le biréacteur est un avion à deux réacteurs

Le quadriréacteur est un avion à 4 réacteurs

1. Déterminons en fonction de p la loi de probabilité de X ainsi que celle de Y .

X est la variable aléatoire qui est associée au nombre de réacteurs ayant une panne sur le biréacteur

Y est la variable aléatoire qui est associée au nombre de réacteurs ayant une panne sur le quadriréacteur

Les avaries pouvant survenir sur les réacteurs sont indépendantes les unes des autres et ont la même probabilité d'apparition p : nous pouvons donc considérer ici que chaque test consistant à connaître le nombre de réacteurs en panne tant dans le biréacteur que dans le quadriréacteur est un schéma de Bernoulli où l'épreuve consiste à savoir si un réacteur est en panne (éventualité succès) ou pas (échec).

Avec le biréacteur, nous pouvons nous retrouver dans la situation où aucun réacteur n'est en panne, où 1 réacteur est en panne ou alors dans le cas extrême où les deux réacteurs sont en panne ; X peut donc ainsi prendre les valeurs 0 ; 1 et 2.

Les probabilités sont données par : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $n = 2$ et $k = \{0 ; 1 ; 2\}$

Nous avons donc la loi :

$X = k$	0	1	2
$P[X = k]$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

Vérification : $(1 - p)^2 + 2p(1 - p) + p^2 = 1$

De même avec Y, on aura la loi :

Les probabilités sont données par $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $n = 4$ et $k = \{0; 1; 2, 3, 4\}$

$Y = k$	0	1	2	3	4
$P[Y = y_i]$	$(1 - p)^4$	$4p(1 - p)^3$	$6p^2(1 - p)^2$	$4p^3(1 - p)$	p^4

Verification: $(1 - p)^4 + 4p(1 - p)^3 + 6p^2(1 - p)^2 + 4p^3(1 - p) + p^4 = 1$

2.

a) Calculons les probabilités P_B et P_Q pour qu'un biréacteur ou un quadriréacteur achève son vol après une avarie.

En cas d'avarie, le biréacteur achève son vol si et seulement si un seul de ses réacteurs est en panne ; tandis que le quadriréacteur achève son vol si et seulement si un ou deux au plus de ses réacteurs sont en panne.

METHODE 1 : La formulation de la question nous invite à utiliser la probabilité conditionnelle, ainsi : Dans le cas du biréacteur, $2p(1 - p)$ est la probabilité que l'avion présente une avarie et achève son vol ; $1 - (1 - p)^2$ est la probabilité que l'avion présente une avarie d'où

$$P_B = \frac{2p(1 - p)}{1 - (1 - p)^2}$$

De même dans le cas du quadriréacteur : $4p(1 - p)^3 + 6p^2(1 - p)^2$ est la probabilité que l'avion présente une avarie et achève son vol ; $1 - (1 - p)^4$ est la probabilité que l'avion présente une avarie d'où :

$$P_Q = \frac{4p(1 - p)^3 + 6p^2(1 - p)^2}{1 - (1 - p)^4}$$

METHODE 2 : Cas favorables/cas possibles

Pour le biréacteur :

Un seul cas favorable : un seul des deux réacteurs tombe en panne, la probabilité est alors $2p(1 - p)$

Cas possibles : 1 ou les deux réacteurs tombent en panne, la probabilité est alors $1 - (1 - p)^2$

D'où

$$P_B = \frac{2p(1 - p)}{1 - (1 - p)^2}$$

Pour le quadriréacteur :

Deux cas favorables : un seul réacteur tombe en panne, la probabilité est alors $4p(1 - p)^3$; deux réacteurs tombent en panne, la probabilité est alors $6p^2(1 - p)^2$.

Cas possibles : 1, 2, 3 ou les 4 réacteurs tombent en panne, la probabilité est alors $1 - (1 - p)^4$

$$\text{D'où } P_Q = \frac{4p(1 - p)^3}{1 - (1 - p)^4} + \frac{6p^2(1 - p)^2}{1 - (1 - p)^4} = \frac{4p(1 - p)^3 + 6p^2(1 - p)^2}{1 - (1 - p)^4}$$

b) Déterminons $P_B - P_Q$ en fonction de p.

$$P_B - P_Q = \frac{2p(1-p)}{1-(1-p)^2} - \frac{4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2}{1-(1-p)^4}$$

$$= \frac{2p(1-p)[1+(1-p)^2]}{1-(1-p)^4} - \frac{4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2}{1-(1-p)^4} = \frac{2p^2(1-p)(2p-1)}{1-(1-p)^4}$$

Donc

$$P_B - P_Q = \frac{2p^2(1-p)(2p-1)}{1-(1-p)^4}$$

c) Indiquons suivant les valeurs de p quel type d'avion présente la meilleure fiabilité.

$$P_B - P_Q = \frac{2p^2(1-p)(2p-1)}{1-(1-p)^4}$$

$1 - (1-p)^4 > 0$ car $p \in]0; 1[$; donc seul le numérateur $2p^2(1-p)(2p-1)$ nous intéresse et en particulier $(2p-1)$ car $2p^2(1-p) > 0$

$2p-1$ s'annule en $p = \frac{1}{2}$ et change de signe.

Alors :

- $\forall p \in]0; \frac{1}{2}[$, le quadriréacteur présente la meilleure fiabilité.
- $\forall p \in]\frac{1}{2}; 1[$, le biréacteur présente la meilleure fiabilité.
- En $p = \frac{1}{2}$, le biréacteur et le quadriréacteur présentent la même fiabilité : $\frac{2}{3}$

Exercice 3

1. Montrons que, pour toute fonction f de (E) , $I_f \geq 0$

$I_f = \int_0^1 [x - f(x)] dx$, puisque $f \in (E)$, (C3) est vérifiée, alors $x - f(x) \geq 0$ pour tout $x \in (E)$ et par positivité de l'intégrale, $I_f \geq 0$.

2.

a. Montrons que la fonction h vérifie les conditions (C1) et (C2)

$\forall x \in [0; 1]$, $h'(x) = (\ln 2) \times 2^x > 0$, donc h est strictement croissante sur $[0; 1]$ et donc (C1) est vérifiée. Par ailleurs, $h(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $h(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$; donc (C2) est aussi vérifiée

h vérifie les conditions (C1) et (C2)

b. Montrons que $\forall x \in [0; 1]$, $g(x) \leq 0$

$g(x) = 2^x - x - 1$; la fonction exponentielle de base 2 est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 1]$ et on aura $1 \leq 2^x \leq 2$ (1); or la fonction qui à x associe $x + 1$ est également croissante sur $[0; 1]$ et $x + 1 \leq 2$ (2)

(1) - (2) donne $2^x - (x + 1) \leq 0$, d'où $\forall x \in [0; 1]$, $g(x) \leq 0$

c. Déduisons-en que $h \in (E)$

D'après la question 2.b, $\forall x \in [0; 1]$, $g(x) \leq 0$ ce qui équivaut à $2^x - 1 \leq x \Leftrightarrow h(x) \leq x$ et donc (C3) est vérifiée; Puisque d'après la question 2.a, h vérifie aussi les conditions (C1) et (C2), on en déduit donc que $h \in (E)$.

d. Montrons que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$

$$I_h = \int_0^1 [x - h(x)] dx = \int_0^1 [x - (2^x - 1)] dx = - \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{2} x^2 - x \right]_0^1 = - \left[\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{\ln 2} \right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$$

Donc $I_h = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

3.

a.

➤ Montrons que la fonction P vérifie la propriété (C2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $P(x) = ax^2 + (1-a)x$.

• Supposons que P vérifie la propriété (C2)

On a : $P(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0$, ce qui conduit à $c = 0$ (1)

$P(1) = a \times 1^2 + b \times 1 + c = 1$, ce qui équivaut à $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$ (2)

En remplaçant les valeurs de b et c issues des relations (1) et (2) dans l'expression de $P(x)$, on obtient

$$P(x) = ax^2 + (1-a)x$$

Donc si P vérifie la propriété (C2) alors, $\forall x \in [0,1]$, $P(x) = ax^2 + (1-a)x$

• Supposons maintenant que, $\forall x \in [0,1]$, $P(x) = ax^2 + (1-a)x$

On a : $P(0) = a \times 0^2 + (1-a) \times 0 = 0$ et $P(1) = a \times 1^2 + (1-a) \times 1 = 1$

Donc $\forall x \in [0,1]$, si $(x) = ax^2 + (1-a)x$, alors P vérifie la propriété (C2).

Conclusion : La fonction P vérifie la propriété (C2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $P(x) = ax^2 + (1-a)x$.

➤ Montrer que toute fonction P définie sur $[0,1]$ par $P(x) = ax^2 + (1-a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E) .

D'après le résultat de la question précédente P vérifie la propriété (C2) ; par ailleurs $\forall x \in$

$$[0,1], P'(x) = 2ax + 1 - a > 0, \text{ car } 2ax > 0 \text{ et } 1 - a > 0$$

Donc P est strictement croissante sur $[0,1]$ et par conséquent (C1) est vérifiée. Comparons sur $[0,1]$

, $P(x)$ et x :

$P(x) - x = ax^2 + (1-a)x - x = ax(x-1) \leq 0$; Donc $P(x) \leq x$ sur $[0,1]$ et par conséquent P vérifie (C3).

Conclusion : Toute fonction P définie sur $[0,1]$ par $P(x) = ax^2 + (1-a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E) .

b. Exprimons en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P .

$$I_P = \int_0^1 [x - P(x)] dx = \int_0^1 [x - (ax^2 + (1-a)x)] dx = \int_0^1 [-ax^2 + ax] dx = a \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{a}{6}$$

Donc $I_P = \frac{a}{6}$

c. Montrons qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$ et donnons cette valeur

$$I_P = \frac{a}{6}$$

$I_h = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{9 - \frac{6}{\ln 2}}{6}$; Or $9 - \frac{6}{\ln 2} \approx 0,3438 \in]0; 1[$, puisque $a \in]0; 1[$, on en déduit qu'il existe donc une valeur de a telle que $I_P = I_h$. Cette valeur est $a = 9 - \frac{6}{\ln 2}$