

CORRECTION DE MATHEMATIQUES, Séries C, D, E ET GCE A-LEVEL 2009

EXERCICE I

1. Déterminons le nombre de pièces fabriquées par chacun des 2 employés.

Soit t le temps (en minutes) mis par AMOUGOU pour fabriquer une pièce, en 7 heures, il va donc fabriquer $\frac{7 \times 60}{t}$ pièces ; EBONGUE va par contre en fabriquer $\frac{7 \times 60}{t+6}$; et la relation entre les quantités est $\frac{7 \times 60}{t+6} = \frac{7 \times 60}{t} - 8$.

$$\text{On a : } \frac{7 \times 60}{t+6} = \frac{7 \times 60}{t} - 8 \Leftrightarrow \frac{420t - (420 - 8t)(t+6)}{t(t+6)} = 0 \Leftrightarrow 420t - (420 - 8t)(t+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 6t - 315 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (1) \times (-315) = 1296 = 36^2$$

$$t_1 = \frac{-6 - 36}{2} = -21 < 0 \text{ et } t_2 = \frac{-6 + 36}{2} = 15 > 0$$

On prend donc $t = 15$ minutes et par conséquent AMOUGOU fabrique $\frac{7 \times 60}{15} = 28$ pièces et EBONGUE $\frac{7 \times 60}{t+6} = 20$ pièces.

2. Résolvons l'équation : $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{3}{2} \cos x \right)^2 - \frac{9}{4} \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{3}{2} \cos x \right)^2 - \frac{1}{4} \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{3}{2} \cos x \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cos x \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos x \right) \left(\sin x - \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \cos x = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ \sin x - \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \sin x - \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} \sin x - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos x = 0$$

$$\text{Posons } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Alors } \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} \sin x - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos x = 0 \text{ devient } \cos \alpha \sin x - \sin \alpha \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k'\pi; \alpha + k\pi \right\} \text{ avec } k, k' \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \left/ \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \right.$$

EXERCICE II

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \ln(1 + e^{-x}) - 1/(e^x + 1)$

1. Déterminons la limite de h en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{e^x + 1} \right] = 0$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

- 2.

- Calculons h'

$$h': x \mapsto h'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

- Vérifions que pour tout réel x , $h'(x) = -1/(e^x + 1)^2$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{1}{e^x + 1} \\ &= \frac{1}{e^x + 1} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} - 1 \right] = -\frac{1}{(e^x + 1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Donc $h'(x) = -\frac{1}{(e^x + 1)^2} < 0$

- Puisque $h'(x) < 0$, alors h décroît vers 0 et par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

1. Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X) - \ln(1 + 0)}{X - 0} = 1$$

- 2.

- Vérifions que pour tout réel x , $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1 + e^x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \ln(1 + e^{-x}) = e^x \ln e^{-x} (e^x + 1) = e^x [\ln e^{-x} + \ln(e^x + 1)] = e^x [-x + \ln(e^x + 1)] \\ &= -xe^x + e^x \ln(1 + e^x) \end{aligned}$$

Donc on a bien $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1 + e^x)$

- Déduisons-en la limite en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-xe^x + e^x \ln(1 + e^x)] = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^x) = 0$$

- 3.

- a) Justifions la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

$f = u \times (v \circ w)$ avec $u(x) = e^x$; $v(x) = \ln x$ et $w(x) = 1 + e^{-x}$. u et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$; v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $w(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+^*$, alors $v \circ w$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent f l'est.

- b) Déterminons f'

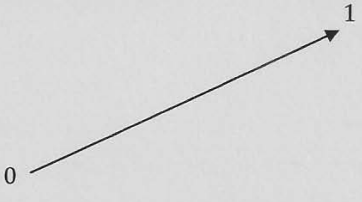
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \ln(1 + e^{-x}) - \frac{e^{-x} e^x}{1 + e^{-x}} = e^x \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{1 + e^{-x}} \\ &= e^x \ln(1 + e^{-x}) - \frac{e^x}{1 \times e^x + e^{-x} e^x} = e^x \left(\ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{e^x + 1} \right) = e^x h(x) \end{aligned}$$

Donc, $f'(x) = e^x \left(\ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{e^x + 1} \right) = e^x h(x)$

En 2.), on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$ et nous savons que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$; Donc $e^x h(x) > 0$ et par conséquent $f'(x) > 0$.

- c)

- Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f		

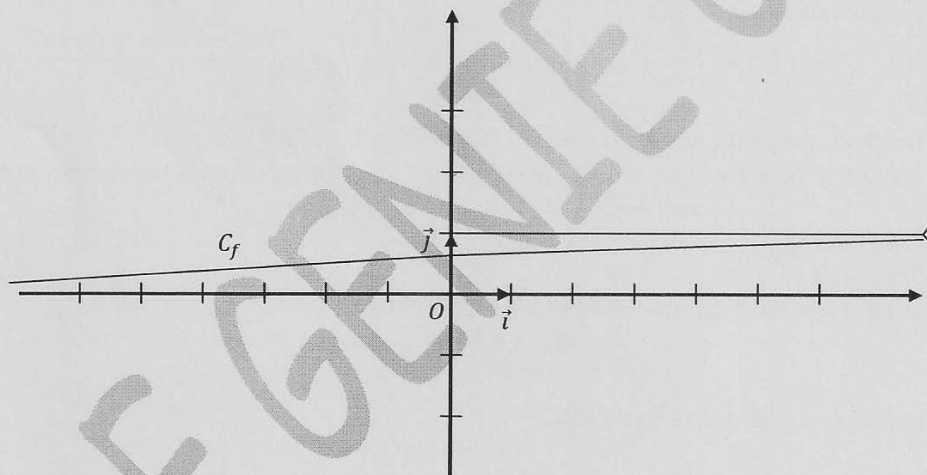
- Graphe de la fonction C_f

Déterminons le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.

$$f(0) = -0e^0 + e^0 \ln(1 + e^0) = \ln 2$$

La courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(0, \ln 2)$

N.B : on omet la recherche des points d'intersection avec l'axe des abscisses car on remarque d'après notre tableau de variation que la courbe ne coupe pas cet axe.



On admet que le point $A(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si pour tout x de $\mathbb{R}$, $[f(a+x) + f(a-x)]/2 = b$

1. Si elle admet un centre de symétrie, l'ordonnée de ce point A est $\frac{1}{2}$

N.B : notre fonction réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, 1[$, si donc elle admet un centre de symétrie, l'ordonnée de celui-ci doit être le milieu de $]0, 1[$ à savoir $\frac{1}{2}$.

2. Démontrons que l'équation $f(x) = 1/2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

f est monotone strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et puisque $1/2 \in]0, 1[$, alors il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R} / f(\alpha) = \frac{1}{2}$.

3. Nous savons que C_f admet un centre de symétrie si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $[f(a+x) + f(a-x)]/2 = b$ (1)

Ici, $a = \alpha$ et $b = \frac{1}{2}$

Puisque (1) est vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}$, en particulier pour $x = \alpha$, on doit avoir : $[f(\alpha + \alpha) + f(\alpha - \alpha)]/2 = 1/2 \Leftrightarrow [f(2\alpha) + f(0)]/2 = 1/2 \Leftrightarrow [f(2\alpha) + \ln 2]/2 = 1/2$; Ce qui est en contradiction avec le résultat $[f(2\alpha) + \ln 2]/2 > 1/2$; donc C_f n'admet pas de centre de symétrie.

EXERCICE III

I.

- Démontrons que $\forall \theta \text{ et } \theta' \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + \\ &i\cos\theta\sin\theta' = \cos\theta\cos\theta' + \cos\theta(i\sin\theta') + (i\sin\theta)\cos\theta' + (i\sin\theta)(i\sin\theta') = (\cos\theta + \\ &i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = e^{i\theta} e^{i\theta'}. \end{aligned}$$

Donc : $\forall \theta \text{ et } \theta' \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.

- Dédisons-en que pour tout réel θ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

On a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$; en particulier pour $\theta = \theta'$, on a $e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2$; on en déduit que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

II.

1. Simplifions ω^5 puis calculons $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$

- $\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i5 \times \frac{2\pi}{5}} = e^{i2\pi} = 1$
- $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = ?$

1^{ère} méthode :

Partant de l'équation $\omega^5 = 1$, on en déduit que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ est la somme des 5 racines 5^{ème} de l'unité et par conséquent $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2^{ème} méthode :

$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ est la somme des 5 premiers termes d'une suite géométrique de raison ω et de premier terme 1. Alors $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 1 \times \frac{1-\omega^5}{1-\omega}$; or on vient de montrer que $\omega^5 = 1$; donc $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2. Montrons que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \frac{1}{z^2}(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2}(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 = z^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} + 1 \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \times z \times \frac{1}{z} + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 \end{aligned}$$

3.

a. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

$$z^2 + z - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(-1) = 5 = (\sqrt{5})^2$$

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

b. Dédution de la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$.

En 1.) On a montré que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ et donc en 2.) on peut remplacer z par ω . En posant $\omega + \frac{1}{\omega} = Z$ dans l'égalité de la question 2.), on retrouve l'équation $z^2 + z - 1 = 0$;

les 2 solutions trouvées en 3.a) nous permettent d'obtenir les équations suivantes :

$$\omega + \frac{1}{\omega} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (1) \text{ et } \omega + \frac{1}{\omega} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

La valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$ sera donc la partie réelle de l'une des solutions de des équations (1) et (2).

Avec (1) on a $\omega^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\omega + 1 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 5) < 0$$

$$\mathcal{R}_e(\omega_1) = \mathcal{R}_e(\omega_2) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0$$

Avec (2) de façon identique on a : $\mathcal{R}_e(\omega_1) = \mathcal{R}_e(\omega_2) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$

Or $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos(2\pi/5) > 0$; on en déduit donc que $(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

4.

a. Déterminons une équation du cercle $\mathcal{C}$:

$$\forall M \text{ d'afixe } z, M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z - z_K| = |z_K - z_A|$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(-\frac{1}{4} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{16} \quad (1)$$

b. Montrons que H a pour abscisse $\cos(2\pi/5)$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe $(O; \vec{u})$ sont tels que $y = 0$; (1) devient donc

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 0^2 = \frac{5}{16} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4} \\ \text{ou} \\ x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0 \end{cases} . \text{ La valeur positive}$$

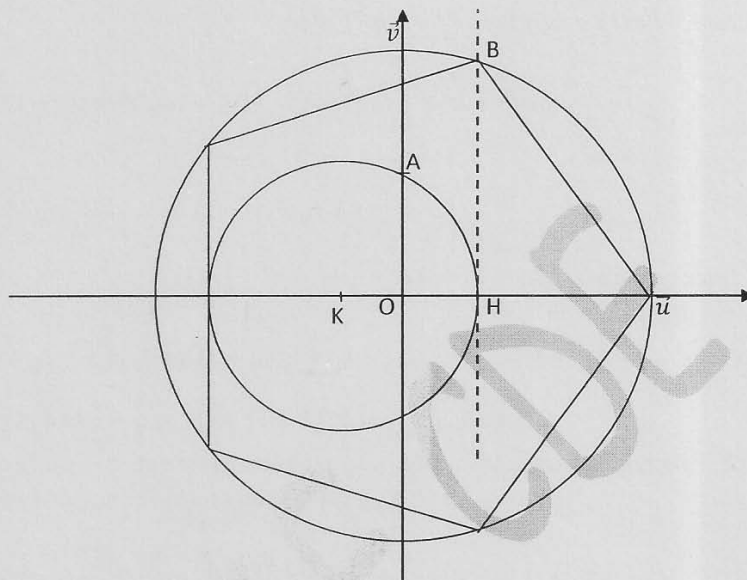
$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ est celle de H et est égale à la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$ trouvée en 3.b) ; Donc H a pour abscisse $\cos(2\pi/5)$.

c. Dédution de la construction du point B.

Le point B est donc le point d'intersection de la verticale issue du point H avec la partie supérieure du cercle unité (Cercle de centre O et de rayon 1).

d. Achevons la construction du pentagone régulier de centre O dont B est un sommet.

Le point B est l'un de nos sommets ; le point d'intersection entre le cercle unité et la partie des $x > 0$ de l'axe $(O; \vec{u})$ en est le deuxième car $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5}$; pour obtenir les trois autres sommets, grâce à notre compas on prend la distance r de B au deuxième point précédent. En prenant chaque sommet pour centre on trace les cercles de rayon r ; leurs intersections avec le cercle unité donne les autre 3 sommets restants et en joignant ces sommets on obtient notre pentagone régulier.



EXERCICE IV

A.

1. Forme des solutions de cette équation

L'équation caractéristique homogène est $r^2 + 36 = 0$.

$r^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (r - 6i)(r + 6i) = 0$ d'où $r_1 = -6i$ et $r_2 = 6i$

Alors la forme des solutions est donc : $y = A\cos 6x + B\sin 6x$, $A, B \in \mathbb{R}$

2. Solution f

Avec a), $f(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A\cos(6 \times 0) + B\sin(6 \times 0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3}$.

Avec b), $f'(0) = 6 \Leftrightarrow -6A\sin(6 \times 0) + 6B\cos(6 \times 0) = 6 \Leftrightarrow B = 1$

Donc : $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{3}\cos 6x + \sin 6x$.

3. Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\sin(6x + \pi/3)$

On a : $f(x) = \sqrt{3}\cos 6x + \sin 6x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}\sin 6x\right) = 2\left(\sin \frac{\pi}{3}\cos 6x + \cos \frac{\pi}{3}\sin 6x\right) = 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\sin(6x + \pi/3)$.

B.

1. a) Calculons I_0 et I_1

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^0 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dt = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^1 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) \, dt = -[\ln|\cos t|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left[\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right] = \ln \sqrt{2}$$

Donc : $I_0 = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$

b)

▪ Montrons que $\forall p \in \mathbb{N}; I_{p+2} + I_p = 1/(p+1)$

on a : $I_{p+2} + I_p = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{p+2} t dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^p t dt$

$\tan^{p+2} t = (1 + \tan^2 t) \tan^p t - \tan^p t$ alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{p+2} t dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^p t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \tan^2 t) \tan^p t - \tan^p t] dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^p t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 t) \tan^p t dt = \frac{1}{p+1} [\tan^{p+1} t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

Donc on a bien $I_{p+2} + I_p = 1/(p+1)$

▪ Dédution de I_2 et I_3

$$I_{0+2} + I_0 = 1/(0+1) \Leftrightarrow I_2 = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I_{1+2} + I_1 = 1/(1+1) \Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

2. Démontrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge

▪ La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}; I_{n+1} - I_n < 0$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} t - \tan^n t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t (\tan t - 1) dt$$

On sait que la fonction tangente est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et donc sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, alors, $\forall t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, on a : $0 \leq \tan t \leq 1$ et de même $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0; \frac{\pi}{4}]$ on aura $0 \leq \tan^n t \leq 1$ (1)

$0 \leq \tan t \leq 1 \Leftrightarrow \tan t - 1 \leq 0$ (2)

de (1) et (2) on obtient $\tan^n t (\tan t - 1) \leq 0$ et donc par conséquent

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t (\tan t - 1) dt \leq 0$ alors on a bien $I_{n+1} - I_n < 0$. On conclut donc que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

▪ Dédution de la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Précédemment, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0; \frac{\pi}{4}]$ on aura $0 \leq \tan^n t \leq 1$; alors

$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$, par conséquent $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et puisque $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors elle converge.