REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE YAOUNDE I

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEUR (ENS)

CONCOURS D'ENTREE EN 1ERE ANNEE SESSION DE 2010

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : INFORMATIQUE

www.tousleconcours.info

Exercice 1 :

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $U_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

On pose $V_{\mathrm{n}} = ln(U_n)$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x$
2. En déduire que $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \leq V_n \leq \frac{n+1}{2n}$

   On admettra que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Montrer que (V_n) converge et préciser sa limite

Exercice 2 :

On peint les six faces d'un dé cubique e bois d'arête trois centimètres. On le débite par des traits de scie parallèle aux plans des faces, en 27 petits cubes d'arête d'un centimètre. On place ces 27 cubes dans un sac. On tire au hasard et sans remise deux cubes du sac, les tirages étant supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.

a. Déterminer la loi de probabilité de X
b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type $\sigma(x)$ de X

Exercice 3 :

On considère l'application $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{8-2\bar{z}}{\bar{z}}$

1- Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = re^{i\theta}$. Déterminer en fonction de r et θ le module de $f(z)$ et son argument lorsqu'il est défini.

2- Soit $\omega = \rho e^{i\varphi}$. Calculer en fonction de $\rho\ et\ \varphi$ le module r et l'argument θ des nombres complexes non nuls tels que $f(z) = \omega$.

3- Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = z$

4- Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tels que : $z + \bar{z} = 4$.

Soit θ l'argument de z avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Calculer en fonction de θ, le module de de z, l'argument de $f(z)$.

Exercice 4 :

1- Déterminer les fonctions solutions différentielles : $y'' + ay' + by = 0$ dans les cas suivants :
   a. $a = 2\ et\ b = -3$
   b. $a = 2\ et\ b = 1$
   c. $a = 1\ et\ b = 1$

2- On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - 2y' + y = 4e^x$ (1) où y est la fonction numérique de la variable réelle x, y' sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde.
   a. On pose $u(x) = 2x^2e^x$. vérifier que la fonction u est une solution particulière de l'équation (1)
   b. On pose $z = y - u$. Montrer que y est solution de (1) si et seulement si , z est solution de l'équation différentielle : $z'' - 2z' + z = 0$ (2).
   c. Intégrer l'équation (2) et en déduire une solution générale de l'équation (1).
   d. Déterminer la solution f de (1) qui vérifie $f(0) = 0\ et\ f'(0) = -3$.

3- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x + 2x^2)e^x$.
   a. Etudier f et représenter sa courbe (C) dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b. Vérifier que f est la solution de (1)qui vérifie $f(0) = 0\ et\ f'(0) = -3$.

www.tousles concours.info