REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE YAOUNDE I

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEUR (ENS)

CONCOURS D'ENTREE EN 1ERE ANNEE SESSION DE 2014

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : INFORMATIQUE

Epreuve : Analyse-Algèbre-Probabilité

Exercice 1 :

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

(1) Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_1^x (2-t)e^{-t}\,dt$.

Proposition : ''$F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1''.

(2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation t d'écriture complexe $z' = -iz + 5 + i$.

Proposition : '' La transformation t est la rotation de centre A d'affixe $3 - 2i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$''.

(3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A,B et C d'affixes respectives $a = 1 + i, b = 3i$, et $c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$.

Proposition : ''Le triangle ABC est un triangle équilatéral''.

(4) On considère le nombre complexe $a = (-\sqrt{3} + i)^{2011}$.

Proposition : '' le nombre complexe a est un nombre complexe imaginaire pure''

(5) On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par : $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ et $v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$.

Proposition : '' Ces deux suites sont adjacentes''.

(6) Soit la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ tel que $f(\ln 2) = 1$.

Proposition : '' La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$''.

(7) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère trois points A,B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c tel que $\frac{c-a}{b-a} = 2i$.

Proposition : '' A appartient au cercle de diamètre $[BC]$''.

(8) Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

Proposition : ''La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$''

(9) On appelle S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solution de l'équation $3x - 5y = 2$.

Proposition : '' l'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1; 3k - 1)$ où k est un entier relatif ''.

(10) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition : '' pour tout entier naturel $k(2 \leq k \leq n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier''.

Exercice 2 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A,B et C d'affixe respectives $a = -2 + 2i; b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   b. En déduire l'affixe du point A' image de A par r.
   c. Déterminer l'affixe s du point S milieu de $[AA']$
   d. Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, Q le milieu de $[CC']$, B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de $[BB']$. On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $p = 2 - 5i$
   a. Démontrer que $\frac{a-p}{z_S-q} = -i$

b. En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments $[AP]$ et $[QS]$ sont de même longueur.

4. Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.