

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUE 2013

DUREE : 3 HEURES

Exercice N°1

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Où, a, b, c, d, sont réels.

i) calculer  $M^2$

ii) montrer qu'il existe deux nombres réels  $\lambda, \mu$  tels que

$M^2 - \lambda - \mu I_2 = O_2$  où  $I_2$  est la matrice identité

iii) En supposant que  $\det M \neq 0$  exprimer  $M^{-1}$  en fonction de M.

iv) Montrer que l'ensemble A des matrices  $A \in M_2(\mathbb{R})$

Telles que  $A = \alpha M + \beta I_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  est un sous espace vectoriel de  $M_2$

v) Déduire que A est stable pour la multiplication des matrices.

iv) Appliquer les résultats ci-dessus à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{1/2}$

Exercice N°2

Soit l'équation du second degré  $y = x^2 + 2x - 3$

Factoriser et trouver les coordonnées de l'extremum. Est-ce un maximum ou un minimum ?

Tracer la courbe de y pour les valeurs de x comprises entre -4 et 2. Trouver la surface de la portion de courbe en dessous de la droite  $y = 5$ .

En utilisant le même système d'axe et de coordonné tracer la courbe  $y = \frac{1}{2}x + 1$

Ecrire les abscisses des points d'intersection des deux courbes et trouver une équation simple qui a pour solution ces points.

**Exercice N° 3**

Soient les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies dans

$$f : x \longrightarrow x^2 - 3$$

$$g : x \longrightarrow 3x + 1$$

$$h : \longrightarrow \frac{2}{3}x - 1$$

Exprimer dans le même esprit les fonctions  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $g^{-1}$ ,  $h^{-1}$  et  $g \circ h$

ii) résoudre l'équation  $fg(x) - gf(x) - 18 = 0$  en exprimant les réponses en valeurs absolues

iii) soient  $|x_1|$  et  $|x_2|$  des solutions de cette équation.

Calculer  $ghf(|x_1|)$ ,  $ghf(|x_2|)$

Etant donné  $c^2 = \left[ \frac{c^2(x-a)}{b} \right]^{1/2}$

Exprimer  $x$  en fonction des autres variables. Trouver les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $b \leq 3$  et  $a = c = 2$ . Trouver l'ensemble des solutions de  $x$  à partir de l'intersection des deux ensembles suivants :

$$S_1 = \{0, 1, 2, \dots, 16\}$$

$$S_2 = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

Résoudre les équations :

i)  $3x = 2y$  et  $x^2 + xy + y^2 = 19$ .

ii)  $3x + y = 5$  et  $x^2 + xy = 3$ .