ENSPT 2011

1. a) Démontrons que $\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{4r^2-1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$

cherchons A et B tels que: $\frac{2}{4r^2-1} = \frac{A}{2r-1} + \frac{B}{2r+1}$

(car on sait que : $4r^2-1 = (2r-1)(2r+1)$)

$$\frac{A}{2r^2-1} + \frac{B}{2r-ei} = \frac{2(A+B)r + A - B}{4r^2-1}$$

Par identification,

$$\begin{cases} 2(A+B) = D \\ A - B = 2 \end{cases}$$

On obtient donc A= 1 et B = -1

Donc $\frac{2}{4r^2-1} = \frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r+1}$ Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{4r^2-1} &= \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2.1-1} - \frac{1}{2.1+1}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2.2-1} - \frac{1}{2.2-ei}\right) + \left(\frac{1}{2.3-1} - \frac{1}{2.3+1}\right) \\ &+ \cdots + \left(\frac{1}{2(n-1)-1} - \frac{1}{2(n-1)+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

on a alors

$$\boldsymbol{\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{4r^2-1} = 1 - \frac{1}{2n+1}}$$

bon!

Voir Mr Raoul

$$b)\ \textit{calculons la valeur exazcte de}\ \sum_{r11}^{20}\frac{2}{4r^2-1}$$

$$\sum_{r=1}^{20}\frac{2}{4r^2-1}=\sum_{r=1}^{10}\frac{2}{4r^2-1}+\sum_{r=1}^{20}\frac{2}{4r^2-1}$$

Donc :

$$\sum_{r=11}^{20}\frac{2}{4r^2-1}=\sum_{r=1}^{10}\frac{2}{4r^2-1}+\sum_{r=1}^{20}\frac{2}{4r^2-1}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2x20+1}\right)-\left(1-\frac{1}{2x10+1}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{41}\right)-\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$$=\frac{40}{41}-\frac{20}{21}$$

{Continuer les calculs}

2. Démontrons que 1+3i est racine de l'équation $z^3+6z+20=0$ (E)

$$(1+3i)^3+6(1+3i)+20=1+9i-27-27i+6\ 18i+20$$

$$=(1-27+6+20)+i\,(9-27+18)$$

$$=0$$

Donc 1 + 3i est une racine de cette équation.

(a) Cherchons les autres racines.

$$\begin{array}{l|l}
z^3+6z+20 & z-(1+3i) \\ \cline{2-2}
-z^3+(1+3i)z^2 & z^2+(1+3i)\ -2+6i \\ \hline
(1+3i)z^2+6z+20 & \\
-(1+3i)z^2+(-8+6i)\,z & \\ \hline
(-2+6i)z+20 & \\
-(-2+6i)\,z-20 &
\end{array}$$

Donc $z^3+6z+20=\left(z-(1+3i)\right)\left(z^2+(1+3i)\ -2+6i\right)$

Résolvons l'équation $z^2 + (1+3i)z - 2 + 6i = 0$

$\Delta = (1 + 3i)^2 - 4(-2 + 6i)$

$= -8 + 6i + 8 - 24i$

$= -18i$

Déterminons les racines de Δ

Soit $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$

Alors $a^2 - b^2 + 2iab = -18i$ et $|\delta|^2 = |\Delta|$

Donc $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \ (E_1) \\ 2ab = -18 \ (E_2) \\ a^2 + b^2 = 18 \ (E_3) \end{cases}$

(E_1+E_3) donne $a^2 = 9$

Donc $a = 3$ ou $a = -3$

$(-E_1 + E_3)$ donne $b = 3$ ou $b = -3$

D'après (E_2) $ab<0$; donc ($a = 3$ et $b = -3$) ou ($a = -3$ et $b = 3$)

Alors $\delta = 3 - 3i$ ou $\delta = -3 + 3i$ (prenons $\delta = 3 - 3i$)

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

$$= \frac{-1 - 3i - 3 + 3i}{2}$$

$$z_1 = -2$$

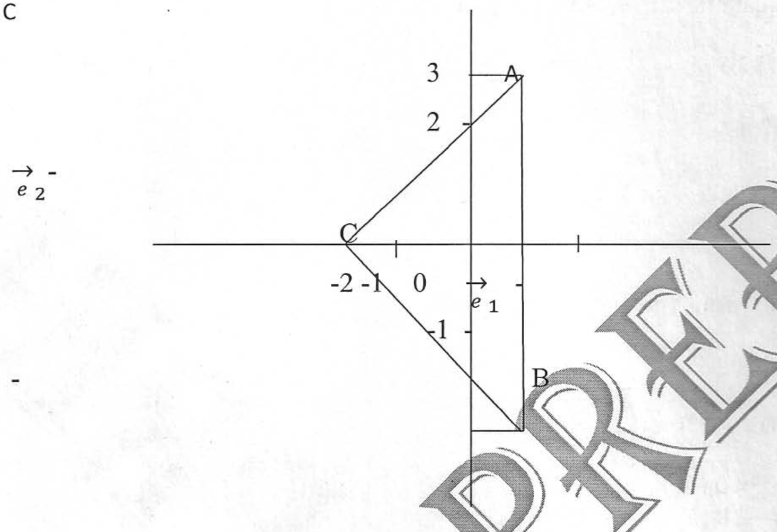
$$z_2 = \frac{-1 - 3i + 3 - 3i}{2}$$

$$z_2 = 1 - 3i$$

Les autres racines de cette équation sont donc : $z_1 = -2$ et $z_2 = 1-3i$

(b) Soient A ; B et C trois points Tels que A(1+3i), B(1-3i) et C(-2)

Plaçons A, B et C



(c) Démontrons que ces trois points sontde des vertices (sommets) d'un triangle rectangle

Il suffit de montrer que $\frac{Z_c+Z_A}{Z_c-Z_B} \in i\,IR$, on aura donc montré que ABC est un triangle rectangle en C.

$$\frac{Z_c+Z_A}{Z_c-Z_B} = \frac{-2-1-3i}{-2-1+3i}$$
$$= \frac{1+i}{1-i}$$
$$= 2i$$

Donc $\frac{Z_c+Z_A}{Z_c-Z_B} \in i\,IR$ Alors ABC est un triangle rectangle en C

3. 1. Déterminons P (J) P(T) et P(S $\cap$ T)

$$P(S) = \frac{1188+12}{1250}$$
$$= \frac{1200}{1250}$$

$$P(T) = \frac{12+49}{1250}$$
$$= \frac{61}{1250}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}\ \Omega\,\mathrm{T}) = \frac{12}{1250}$$
$$= \frac{6}{625}$$

2. Ici on veut calculer la probabilité de choisir un athlète qui a un test positif sachant qu'il est non dopé.

On veut donc calculer $P_S(T)$

$$P_S(T) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{S}\ \Omega\,\mathrm{T})}{P(S)}$$
$$= \frac{\frac{6}{625}}{\frac{1200}{1250}}$$

3. $P(S)P(T) \neq \mathrm{P}(\mathrm{S}\ \Omega\,\mathrm{T})$ donc ces événements ne sont pas independants

4. Ici on veut calculer $P_T(S)$

$$P_T(S) = \frac{P(S\lambda T)}{P(T)}$$
$$= \frac{\frac{6}{625}}{\frac{61}{1250}}$$