ENSPT 2010

EXERCICE1

1) a) Probabilité de tirer deux boules vertes.

Soit A l'évènement : « tirer deux boules vertes ».

Calculons P (A)

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\infty\ \Omega}$$
$$= \frac{C_3^2}{C_{12}^2}$$
$$\frac{3}{66}$$
$$P(A) = \frac{1}{22}$$

b) Soit B l'évènement « tirer deux boules de couleurs différentes ».

Calculons P(B)

$$P(B) = \frac{card\ B}{card\infty\ \Omega}$$
$$= \frac{C_3^1\, x\, C_4^1 + C_3^1\, x\, C_4^1 + C_4^1 x\, C_5^1}{C_{12}^2}$$
$$\frac{3x4 + 3x5 + 4x5}{66}$$
$$P(B) = \frac{47}{66}$$

2) a) Loi de probabilité de X

Déterminons d'abords l'ensemble X(Ω) des valeurs de X

X(Ω) = {0 ;1 -1 ; 2 ; -2}

$$P\{X=0\} = \frac{C_3^1\ C_4^1 + C_3^2}{C_{12}^2}$$

$$= \frac{5.4+3}{66}$$

$$\boldsymbol{P\{X=0\} = \frac{23}{66}}$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_5^1 C_3^1}{C_{12}^2}$$

$$= \frac{5.3}{66}$$

$$\boldsymbol{P\{X=1\} = \frac{15}{66}}$$

$$P\{X=-1\} = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_{12}^1}$$

$$\boldsymbol{P\{X=-1\} = \frac{12}{66}}$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_5^2}{C_{12}^2}$$

$$\boldsymbol{P\{X=2\} = \frac{10}{66}}$$

$$P\{X=-2\} = \frac{C_4^2}{C_{12}^2}$$

$$\boldsymbol{P\{X=-2\} = \frac{6}{66}}$$

La loi de probabilité de X est donc donné par le tableau suivant

k	0	1	-1	2	-2
P{X=k}	$\frac{23}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{10}{66}$	$\frac{6}{66}$

b) Espérance mathématiques, variance, écart-type.

Espérance

$E(x) = 0.\frac{23}{66} + 1.\frac{15}{66} - 1.\frac{12}{66} + 2.\frac{10}{66} - 2.\frac{6}{66} \quad = \frac{15-12+20-12}{66}$

$E(x) = \frac{11}{66}$ $\quad\quad$ $\mathbf{E(x) = \frac{1}{6}}$

Variance

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = 0^2 . \frac{23}{66} + 1^2.\frac{15}{66} + (-1)^2.\frac{12}{66} + 2^2.\frac{10}{66} + (-2)^2.\frac{6}{66}$

$E(x^2) = \frac{15}{66} + \frac{12}{66} + \frac{40}{66} + \frac{24}{66}$

$= \frac{91}{66}$

Donc , $V(x) = \frac{91}{66} - (\frac{1}{6})^2 = \frac{535}{396}$

$$V(x) = \frac{535}{396}$$

Ecart-type

$$Б(x) = \sqrt{V(x)}$$

$$Б(x) = \sqrt{\frac{535}{396}}$$

Exercice 2

$$(S) \quad \begin{cases} -2x + 3y - 8z = -9 & (E_1) \\ x - y + 3z = 6 & (E_2) \\ 3x - 2y + 13z = 15 & (E_3) \end{cases}$$

Résolvons (S)

$$\begin{matrix} (E_1) \\ (2E_2) \end{matrix} \begin{cases} -2x + 3y - 8z = -9 \\ 2x - 2y + 6z = 12 \end{cases}$$

$$(E_1 + 2E_2): \quad y - 2z = 3 \quad (E_2')$$

$$\begin{array}{r} (3E_1 \\ (2E_3) \end{array}\begin{cases} -6x + 9y - 24z = -27 \\ 6x - 4y + 26z = 30 \end{cases}$$

$$(3E_1 + 3E_3): \quad 5y + 2z = 3 \quad (E_3')$$

$$\begin{array}{r} -(5E_2') \\ (E_3')) \end{array}\begin{cases} -5y + 10z = -15 \\ 5y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$(-5E_2' + E_3'): \quad 12z = -12 \quad (E_3'')$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} -2x + 3y - 8y = -9 \ (E_1) \\ y = 2z = 3 (E_2') \\ 12z = -12 (E_3'') \end{cases}$$

(E_3'') donne z = -1

(E_3'') dans (E_2') : y +2 = 3

y = 1

(E_3'') et (E_2') dans (E_1) : -2x + 3 + 8 = -9

-2x = - x0

x = 10

donc **S = { (10 ; 1 ; -1) }**

2) Déduction des solutions des systèmes (S') et (S'')

$$(S') = \begin{cases} -ln(x^2) + ln(y^3) - 8ln\, z = -9 \\ lnx - lny + 3lnz = 6 \\ ln(x^3) - ln(y^2) + 13lnz = 15 \end{cases}$$

Contraintes

x>0 ; y > 0 ; z > 0

Résolution :

(S') est équivalent à

$$\begin{cases} -2lnx + 3lny - 8lnz = -9 \\ lnx - lny + 3lnz = 6 \\ 3lnx - 2lnz + 13lnz = 15 \end{cases}$$

Posons x = lnx ; y = lny ; z = lnz

On obtient le système (S')

$$\begin{cases} -2x + 3y - 8z = -9 \\ x - y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 13z = 15 \end{cases}$$

Donc X = 10 ; Y = 1 ; Z = -1

lnx = 10 lny= 1 lnz= -1

x = e^{10} y= e z= e^{-1}

S = {(e^{10} ; e ; e^{-1})}

(S'') $\begin{cases} -2e^x + 3e^x - 8e^z = -9 \\ e^x - e^y + 3e^z = 6 \\ 3e^x - 2e^y + 13e^z = 15 \end{cases}$

Posons x = e^x; y = e^y; z= e^z

On obtient aussi le système (S) , Donc x = 10 ; y = 1 ; z = -1

$e^x = 10$; e^y=1 $e^z = -1$

L'égalité e^z= -1 est impossible donc z n'existe pas.

Alors **S = ∅**

Exercice 3

f(x) = -x^3+2x²-2x+1

1) Calcul de f (1)

$f(1) = -1^3+2(1)^2-2(1)+1$

$= 0$

2) Déterminons les réels a, b et c

$f(x) = (x-1)(-x^2+x-1)$

$a = -1$; $b=1$; $c=-1$

3) a) signe de P(x)

$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-1)$

$= 1-4$

$\Delta = -3$

$\Delta > 0$ donc p n'admet pas de racine reel et $\forall x \in IR$, $P(x) < 0$

b) Résolvons l'équation $-e^{-3x} + 2e^{2x} - 2e^{x} + 1 \geq 0$

$-(e^x)^3 + 2(e^x)^2 - 2e^x + 1 \geq 0$

Posons $X = e^x$, on obtient $x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$f(x) \geq 0$

Tableau de signe de *f(x)*

$f(x) = (x-1)P(x)$

x	$-\infty$	1		$-\infty$
$x-1$	-		+	
$P(x)$	-		-	
$f(x)$	+	0	-	

Donc $x \in]-\infty ; 1]$

$x \leq 1$

$e^x \leq 1$

$x \leq \ln 1$

$x \leq 0$

S=]-∞ ; 0[

Exercice 4

1) a) $Df = \mathrm{IR}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-xe^x + 2e^x)$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

$$\lim_{\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\to +\infty} \left(\frac{-xe^x + 2e^x}{x}\right)$$
$$= \lim_{\to +\infty} \left(-e^x + 2\frac{e^x}{x}\right)$$
$$= \lim_{\to +\infty} e^x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)$$

Or $\lim\limits_{\to +\infty} e^x = +\infty$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$

$$\lim_{\to +\infty} f(x) = \lim_{\to +\infty} (-xe^x + 2e^x)$$
$$= \lim_{\to +\infty} e^x(-x + 2)$$
$$= -\infty$$

2) a) Dérivée de *f* et son signe

$$f'(x) = e^x - xe^x + 2e^x$$
$$= e^x - xe^x$$
$$\boldsymbol{f'(x) = (1-x)e^x}$$

Etude du signe de f'

x	$-\infty$		1		$-\infty$
$1-x$	$+$		0	$-$	
e^x	$+$			$+$	
$f'(x)$	$+$		0	$-$	

dans $]-\infty\,;1]$; $f'(x) \geq 0$

donc $[1\,;+\infty[$ $f'(x) \leq 0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

3) {on complète le tableau }

4) tracé de la courbe (C)

5) a) calcul de F'(x)

$F'(x) = -e^x + (3-x)\,e^x$

$= -\,xe^x + 2e^x$

$F'(x) = f(x)$

On peut donc conclure que F est une primitive de f.

b) Primitive de f qui s'annule en 0

les primitives de f sont de la forme $(3-x)e^{x}+k$.

Soit G la primitive qui s'annule en 0. Alors G vérifie $(3-0)\ e^{0} + k = 0$

Donc **$G(x) = 3-x)\ e^{x} -3$**