ENSPT 2007

Exercice 1 : Partie A.

a) Vérifions que f est impaire

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+7}{2(-x)}$$
$$= \frac{x^2+7}{-2x}$$
$$= -\frac{x^2+7}{+2x}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$ d'où f est impaire

b) Etudions f sur]o ; +∞ [et dressons son tableau de variation

limites :

$\lim\limits_{x \to 0_>} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée

$$f'(x) = \frac{2x(2x)-2(x^2+7)}{(2x)^2}$$
$$= \frac{2x^2-14}{(2x)^2}$$

Sens de variation de f

$f''(x)=0$

$2x^2-14 = 0$

$x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

x	0		$\sqrt{7}$		$+\infty$
$\frac{2x^2-14}{(2x)^2}$	‖	$-$	0	$+$	

- Dans $]0\,;\sqrt{7}[$ $f''(x) < 0$ donc *f est* strictement décroissante.
- Dans $]\sqrt{7};\,+\infty[$ $f''(x) > 0$ donc ***f*** est strictement croissante

Tableau de variation

x	0		$\sqrt{7}$		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	|| $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{7}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Vérifions que (C) admet une asymptote oblique

$$f(x) = \frac{x^2+7}{2x}$$
$$= \frac{x^2}{2x} + \frac{7}{2x}$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{2x}\right) = 0$$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en -∞ et en +∞

On a aussi $\lim\limits_{x\to 0_>} f(x) = +\infty$

Donc La droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à (C)

b) position de (C) par rapport à (D) sur $]0\,;+\infty[$

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{7}{2x}$$

x	0		$+\infty$
$\frac{7}{2x}$	$\|\|$	$+$	

Dans $]0\,;+\infty[$ $\quad (fx) > \frac{x}{2}$

Donc dans $]-\infty\,;0[$ (C) est au dessus de (Δ)

3) **Tracé de (C)**

f est impaire donc (C) admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.

Table de valeurs

x	1	2	3	4	5
f(x)	4	11/4	15/6	23/8	32/10

Partie B

a) Valeur tracte de α_λ

$$a_\lambda = \int_\lambda^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x = \int_\lambda^1 \frac{7}{2x} \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{7}{2} ln(x)\right]_\lambda^1$$

$$= -\frac{7}{2} ln\lambda$$

$$a_\lambda = -\frac{7}{2} ln\lambda$$

b) calcul de $\lim\limits_{\lambda \to 0^{>}} a_\lambda$

$$\lim_{\lambda \to 0^{>}} a_\lambda = +\infty$$

2) a) calcul de λ_0

$$a_\lambda = \frac{7}{2}$$

$$-\frac{7}{2} ln\lambda = \frac{7}{2}$$

$$ln\lambda = -1$$

$$\lambda = e^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{e}$$

$$donc \quad \lambda_0 = \frac{1}{e}$$

b) Valeur approchée de λ_0

2,718 < e <2,719

$$\frac{1}{2{,}719} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2{,}718}$$
$$0{,}367 < \frac{1}{e} < 0{,}368$$

0,367 est une valeur approchée de λ_0 à l'ordre 3 et par défaut (ou 0,368 est une valeur approché à l'ordre 3 par excès de λ_0)

Partie C

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_o} \\ \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{f(u_n)} \end{cases}$$

a) confert schéma partie A

b) conjecture sur le sens de variation de (u_n)

On conjecture que la suite (u_n) est décroissante

a) Démontrons que la suite (u_n) est à termes strictement positifs

Il s'agit de démontrer que $\forall n \in IN$; $u_n > 0$. Par récurrence :

Montrons d'abord que $U_0 > 0$

$U_0 = 0$ et $3>0$. Donc $U_0 > 0$

Soit $n \epsilon IN$, supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

$U_n > 0; donc\ U_n \epsilon]0; +\infty[$

D'après le tableau de variation, $f(U_n) \geq \sqrt{7}$ donc $U_{n+1} \geq \sqrt{7}$

Alors $U_{n+1} > 0$ d'où $\forall n \epsilon IN, U_n > 0$

Conclusion (U_n) est à termes strictement positifs.

b) Montrons que (U_n) est minorée par $\sqrt{7}$

Il s'agit de monter que $\forall n\ \epsilon IN, U_n > \sqrt{7}$, montrons d'abord que $U_0 \geq \sqrt{7}$

$U_0 = 3\ \ et\ 3 \geq \sqrt{7}\ \ donc\ U_0 \geq \sqrt{7}$

Soit $n\ \epsilon IN$, supposons que $U_n \geq \sqrt{7}$ et montrons que $U_{n+1} \geq \sqrt{7}$

$U_n \geq \sqrt{7}$ donc $U_n \epsilon [\sqrt{7};\ +\infty[$

D'après le tableau de variation de f sur $[\sqrt{7}; +\infty, [,\ f(U_n) \geq \sqrt{7}$

Donc $U_{n+1} \geq \sqrt{7}$

Alors $\forall n \in IN, U_n \geq \sqrt{7}$

Conclusion (U_n) est minorée par $\sqrt{7}$

c) démontrons la conjecture de 1b)

Démontrons donc que (U_n) est décroissant

Il s'agit de démontrer que $\forall n \in IN\ \ U_{n+1} \leq U_n$

Démontrons d'abord que $U_1 \leq U_0$

$$U_0 = 3\ et\ U_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3} \leq 3\ donc\ U_1 \leq U_0$$

Soit $n \in IN$ supposons que $U_{n+1} \leq U_n$ et démontrons que $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

D'après la question 2) b) $\forall n \in IN, U_n \epsilon [\sqrt{7};\ +\infty[$

Or $U_{n+1} \leq U_n$

Donc $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$ ($car\ f$ est croissante sur $[\sqrt{7};\ +\infty[$

Donc $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

Alors $\forall n \in IN, U_{n+1} \leq U_n$

Conclusion (U_n) est décroissante.

3) Déterminons la limite de (U_n)

La suite (U_n) est décroissante minorée. Elle est donc convergente et sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x$$

$$\frac{x^2 + 7}{2x} = x$$

Contrainte $x \neq 0$

Résolution : $x^2+7=2x^2$

$-x^2 + 7 = 0$

$x^2 = 7$

$x = \sqrt{7} ou\ x = \sqrt{7}$

$S = \langle -\sqrt{7};\ \sqrt{7} \rangle$

Or (U_n) est à terme strictement positif, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{7}$

Exercice II

1) Résolvons donc cette équation (1)

$Z^3 - \lambda(1+i)z^2 + i\lambda^2 Z = 0$

$Z(Z^2 - \lambda(1+i)Z + i\lambda^2) = 0$

$Z = 0\ ou\ Z^2 - \lambda(1+1)Z + i\lambda^2 = 0(2)$

Resolvons $Z^2 + \lambda(1+i) Z + i\lambda^2 = 0$ (2)

$\Delta = (\lambda(1+i))^2 - 4(1)(i\lambda^2)$

$= \lambda^2 + 2i\lambda^2 + \lambda^2 - 4i\lambda^2$

$= -2i\lambda^2$

Calculons les racines de Δ

Déterminons d'abord les racines de $-2i$

soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que :

$\delta = a + ib\ \ et\ \delta^2 = -2i$

$\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -2i$

Donc $a^2-b^2+2iab = -2i$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ab = -1 \end{cases}$$

De plus $|\delta|^2 = |-2i| = 2$

Donc $a^2 + b^2 = 2$

$$\text{Alors} \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (E_1) \\ ab \quad = -1 & (E_2) \\ a^2 + b^2 = 2 & (E_3) \end{cases}$$

(E_1+E_2) donne! $a^2 = 1$

Donc a = -1 ou a = 1

(- E_1 + E_2) donne b² = 2, donc b= -1 ou b = 1

Alors ab<0

On a donc : (a = 1 et b = -1) ou (a = -1 et b = 1)

Les deux racines de -2i sont donc

$\delta_1 = 1 - i$ et $\delta_2 = -1 + i$

Les racines de Δ sont ainsi

(1-i) λ et (-1 + i)λ

L'équation (2) a donc pour solutions

$$Z_1 = \frac{\lambda(1+i) - (1-i)\lambda}{2}$$

$Z_1 = i\lambda$

$$Z_2 = \frac{\lambda(1+i) - (1-i)\lambda}{2}$$

$Z_2 = \lambda$

S= $\{0; \lambda; i\lambda\}$

2) Soient les points A, B et C les images respectives des solutions 0 ; λ et iλ montrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

$$\frac{Z_c - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-i\lambda}{-\lambda}$$

$$donc \ \frac{Z_c - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

alors ABC est un triangle restangle et isocèle en A.

3) Déterminons λ pour que l'équation admette 1 +i comme solution puis résolvons cette équation dans chaque cas.

S = {0 ; λ ; iλ}

On a donc λ = 1+i ou Si iλ = 1+i

- Si λ =1+i

Alors iλ = i(1+i)

= -1 + i

ET donc S = {0; 1 + i; -1 + i}

- Si iλ = 1 + i

$$\lambda = \frac{1+i}{i}$$

Alors $= \frac{i-1}{-1}$

$$\lambda = 1 - i$$

Et donc S = {0 ; 1-i ; 1+i}

Exercice III

Probabilité pour que Mme Anne possède 2 filles après 6 accouchements.

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de filles que peut avoir Mme Anne après 6 accouchements.

La probabilité pour que Mme Anne ait une fille après un accouchement est $P = \frac{1}{4}$

X suit donc la loi binominale de paramètre $x = 6\ et\ P = \frac{1}{4}$

Donc $P\{X = 2\} = C_6^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{15x3^4}{4^6}$

La probabilité demande est don $P\ \{X = 2\ \} = \frac{1215}{4096}$