ENSPT AOUT 2012

Exercice 1 :

n étant un entier naturel, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$

1 ° Montrer que pour tout n, A_{n+3} est congru à A_n modula 7. En déduire les entiers n tels que A_n soit divisible par 7.

2° Les nombres qui, dans le système de numération à base 2, s'écrivent

a) 1110,

b) 1010100,

c) 1001001000

Sont-ils divisibles par 7 ?

Exercice 2 :

On considère la famille de fonction f_λ définies par $f_\lambda(x) = 1 + l_n\,(1 + \lambda x)$ ou λest un réel non nul; l_n désigne le logarithme népérien, (C_λ) la courbe de f_λ et *(D)* la droite d'équation *y=x* dans le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie A : Recherche des points d'intersection de (C_λ) et *(D)*

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_λ

On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

2. On suppose $\lambda <$ O. Etudier les variations φ_λ de et dresser son tableau de variations.

En déduire le nombre de points d'intersection de C_λ et *(D)*.

3. a. On suppose $\lambda >$O. Etudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations. Etablir que la plus grande valeur prise par φ_λ quand *x* décrit l'ensemble de définition de *m* sur $(\lambda) = \frac{1}{2} + 1n\lambda$

b. Etudier les variations de *m* sur $]0; +\infty[$; en déduire le signe de $m(\lambda)$.

c. Déterminer le nombre de points communs à (C_λ) et *(D)*

Partie B : Etude de cas particulier À= 1

1. a. Soit la courbe de la fonction logarithme népérien; trouver une translation qui transforme

(Γ) en (C_1).

b. Représenter graphiquement la courbe (C_1) et la droite (D). (On prendre pour unité 3cm sur les axes).

2. On appelle P et Q les points d'intersection de (C_1) et (D) ; P est le point d'abscisse négative P et Q est le point d'abscisse positive q. Démontrer que $2 < q < 3$.

3. L'unité d'aire étant le cm^2, calculer en fonction de p et q l'aire du domaine compris entre (C_1), (D) et les droites d'équations $x=p$ et $x=q$.

on pourra utiliser une intégration par parties.

Exercice 3 :

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = e^x - e^{-x} - 1$ et $g(x) = x^2 - x - 6$

1- a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Calculer les limites aux bornes de Df

2-Résoudre 1 équation: $g(x) = 0$

3-Montrer que $f(x) = (e^{2x} - e^x - 6)/e^x$

4-A l'aide d'un changement de variable, résoudre 1 équation $f(x) = 0$

5-a) Donner la primitive de f qui s'annule en 0

b) Donner la dérivée de f