ENSPT AOUT 2010

EXERCICE 1:

Le but de cette exercice est de déterminer la limite de la suite (Un) $n\geq1$dont le terme général est défini par : Un= $\int_0^{t/n}\sqrt{\frac{t}{1+t^2}}dx$

Le calcul explicite de Un n'est pas demandé.

1. On considère la fonction f définie par f(t)= $\sqrt{\frac{t}{1+t^2}}$déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est strictement croissante sur [0 ; 1].

2.1) Montrer que pour tout entier naturel n> 1 on a Un ≥0.

2.2) Etudier le signe de Un_{-1}- Un, et montrer que la suite (Un) $n\geq 1$ est convergente.

2.3) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq1$, on a: $0\leq Un\leq\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}}$, et en déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\geq1}$

EXERCICE 2

Partie 1

1- On note M_1et M_2les points du plan complexe d'affixes respectives :$Z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}$ et Z_2= 1 - i

1.1. Mettre sous la forme trigonométrique z_1, $z_2$et $Z=\frac{z_1}{z_2}$

1.2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2. Soit l'équation (E) d'inconnue x : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\,cosx+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2$

2. 1.Montrer que $\text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\beta+Sin\alpha.\text{Sin}\,\beta=\text{Cos}\,(\alpha-\beta)$.

2.2. Résoudre l'équation (E) dans IR.

3- On considère le nombre :

$$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3.1. Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument.

3.2. En déduire le module et l'argument de a.

EXERCICE 3

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, i, j). (Unité graphique 2cm)

Partie I

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + lnx)$$

Et on désigne par (C) sa courbe représentative relativement au repère (o, i, j).

1- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0, et calculer $f'(x)$.

2- Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = lnx + x - 3$.

2.1- Etudier le sens de variation u.

2.2-Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une unique solution □ dans l'intervalle $[2; 3]$ et déterminer une valeur approchée de □ à 10^{-2} près.

2.3- En déduire le signe de $u(x)$sur $]0; +\infty[$.

3-

3.1- Dresser le tableau de variations de f.

3.2- Exprimer ln comme un polynôme en □. Montrer que $f() = -\frac{(-1)^2}{}$.En déduire une valeur approchée de $f()$ à 10^{-2} près.

4-

4.1- Etudier le signe de $f(x)$.

4.2- Tracer (C).

Partie II

Soit F la primitive de f qui s'annule pour x = 1. On appelle Γ La courbe représentative de F relativement au repère $(0 ; \vec{i} ; \vec{j})$

1.1. Sans calculer F(x), étudier le sens de variation de Fsur]0;+∞ [.

1.2. Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2?

2. l. soit h définie sur]0 ; +∞ [par$h(x) = x.lnx - x$.Vérifier que h est la primitive sur]0 ;+∞[de $x \rightarrow lnx$

2.2. Montrer que pour tout x strictement positif : $f(x) = lnx - \frac{ln\,x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

2.3. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x

3.1. Déterminer$\lim_{x\to0} F(x)$

3.2. Montrer que pour tout x strictement supérieur à 1:

$$F(x) = xlnx\left(1 - \frac{1lnx}{2x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{lnx}\right) + 3$$

En déduire $\lim_{x\to0} F(x)$

3.3. Dresser le tableau des variations de F.

3.4. Tracer Γ sur le même graphique que (C).

4. Calculer en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et $x = e^2$