INGENIEURS DES TRAVAUX DES TELÉCOMMUNICATIONS

ENSPT AOUT 2008

EXERCICE 1

Pour tout nombre complexe Z, on définit $P(z)=Z^3+2(\sqrt{2}-1)Z^2+4(1-\sqrt{2})Z-8$

1) Vérifier que P(2)=0 puis déduire une factorisation de P(Z)

2) Résoudre dans C l'équation P(Z)=0, soient Z_1 et Z_2les solutions autres que 2; Z_1ayant une partie imaginaire positive ; vérifier que $Z_1+Z_2=--2\sqrt{2}$

Déterminer le module et un argument de Z_1 et Z_2

3) a) placer dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0, \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B et C d'affixe respectifs 2 ; Z_1 et Z_2 et I milieu [AB]

b) Montrer que le triangle OAB est isocèle et déduire une mesure de $(\vec{U}; \vec{0I})$

c) calculer l'affixe Z_1 de I puis le module de Z_1endéduit des résultats précédents : $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur$]0 ; +\infty[$par$f(x) = x + 1 + \frac{x+lnx}{x^2}$ on rappelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère (o ; i ; j) du plan (unité graphique 2cm)

1) a) déterminer la limite$f(x)$quand x tend vers 0

b) montrer que $\frac{x+lnx}{x^2}$ *tend vert* 0 quand x tend vers $+\infty$; en déduire la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$

c) Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équation respectives x=0 puis y = x+1 sont asymptotes à (C)

2) a) montrer que la fonction h définie par $h(x) = x + lnx$ est strictement croissante sur l'intervalle$]0;+\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positifs et négatives

b) montrer que (Δ)coupe(C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha+ ln\,\alpha = 0;$

Montrer que $\alpha \in]0,56; 0,57[$

c) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ)

3) Etudier le sens de variation de f

4) Déduire de 3), l'existence d'une valeur unique β telle que f(β)=0 et montrer que $\beta \in]0,46; 0,47[$

5) construire (C) et (Δ)

6)

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \frac{lnx}{x^2} dx$

b) Hachurer la région du plan comprise entre (C) ;(Δ) et les droites d'équation x=1 et x=e ; calculer en cm^2 l'aire de cette région.

EXERCICE 3

Linéaires cos ^{4}(3x) et déduire I= $\int_0^{\pi} cos^4(3x)dx$

Calculer J=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos3x\ sin5x\ dx$etK=$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3(2x)dx$

EXERCICE 4

On considère la suite (U_n) définie par U_n=$\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1.

a) soit I la fonction définie sur [0 ; 2] *par I(t)=*$\frac{2t+3}{t+2}$

Etudier les variations de I sur [0 ; 2]. En déduire que : ∀t ∈ [0; 2] ;$\frac{3}{2} \leq I(t) \leq \frac{7}{4}$

b) montrer que pour t ∈ [0; 2], on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq I(t)e^{n} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$

c) En déduire que :$\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n < \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

d) montrer que si la suite (Un) possède une limite α, alors 3≤ $\alpha \leq \frac{7}{2}$

2.

a) vérifier que : $\forall\ t\ \in[0; 2], \frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{1+2}$. En déduire : I=$\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$

b) Montrer que $\forall t \in [0; 2], I \leq\ e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que : $I \leq U_n \leq Ie^{\frac{2}{n}}$

c) Déterminer la limite a de (Un)

EXERCICE 5

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée B=($\vec{i}$;$\vec{j}$) g l'endomorphisme de E_2 qui à un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u} = x + \frac{1}{2}y)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$.

1 a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijective.

b) Déterminer le noyau *Kerg* et l'image *Img* de g.

c) En déduire que $Ker g = Im g$ de g.

2. soit $\vec{v}$ un vecteur de $Ker g$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$.

3- soit $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de coordonnées respectives (-1 ; 2) et (-1 ; 1)

a) Montrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E_2

b) Donner la matrice de g dans la base B'