INGENIEURS DES TRAVAUX DES TELÉCOMMUNICATIONS

ENSPT AOUT 2007

EXERCICE 1

On considère la suite $(Un)_{n \in IN}$ des nombres réels définie par ladonnéedeU_0, U_1

Par la relation $Un = \frac{3}{4}U_{n-1} + \frac{1}{4}U_{n-2}$pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2.

1) Démontrer par récurrence que si $U_O = U_1$ la suite est stationnaire.

2) On suppose par la suite $U_O \# U_1$, soit (U_n) n ϵ IN la suite définie par : $V_n = U_n - U_{n-1}$

a) Démontrer que (Vn) n ϵ IN est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Donner l'expression de V_n en fonction de n et du premier terme

c) On pose $Sn=V_1+V_2+\ldots Vn$, Evaluer cette somme en fonction de n et du premier terme.

d) Exprimer Sn en fonction de U_1 et de U_0.

EXERCICE 2

1) Résoudre dans R :

a) $-3e^{2x}+4e^{x}-1=0$

b) $\begin{cases} -3e^{2x}+4e^{x}-1 \geq 0 \\ 3(\ln(x+2))^2+\ln(x+2) \leq 0 \end{cases}$

2) Résoudre dans R^3 le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 2x - 2y - z = -3 \end{cases}$$

a) Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu

b) Montrer que les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives $2x+y+2z-6=0$et $2x-2y-z+3=0$sont perpendiculaires.

PROBLEME

Partie A :

Soit g la fonctiondefinir par $g(x) = \ln\left(\frac{2x-5}{2x+5}\right)$

a) Déterminer le domaine de définition de g et calculer les limites de g aux bornes de ce domaine

b) Montrer que la fonction g est impaire.

Partie B :

I- Soit la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2\ln x$

1) Etudier les variations de la fonction h et dresser son tableau de variation.

2) Montrer que l'équation h(x)=0 admet une solution unique x_0=1

II- Soit la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par f(x)= $\frac{1}{2}x^2 + 2lnx$et Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé

1. a) étudier les variations de f

b) Montrer que la courbe Cf admet une branche parabolique

c) Montrer la courbeCf coupe la droite (Δ) d'équation cartésienne $y = \frac{1}{2}x$ en un point unique A, dont on déterminera les coordonnées.

d) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution □ telle que 0,83<□<0,84.

e) Tracer la droite (Δ) et la courbe Cf dans le même repère.

2. R est le domaine du plan limité par la courbe Cf, la droite (Δ) et les droites d'équation respectives x = 1 et x = λ avec λ> 1

a) Calculer l'aire A(λ) de R.

b) Déterminer la limite de A(λ) quand λ tend vers + ∞