



CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DES EAUX ET FORETS

SESSION 2013

CYCLE : TSEF

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 5

$$\frac{\sqrt{11}}{3} - 2\sqrt{2} = -\frac{18}{3}$$

EXERCICE : I (4,5points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0$

1- a) Déterminer le réel y tel que yi soit solution de (E) (0,5pt)

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z ,
 $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$ (0,5pt)

2- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ (0,5pt)

b) En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique (0,75pt)

3- Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $z_A = i$ le point B d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et C d'affixe z_C , le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

a) Représenter sur un même graphique, les points A ; B et C (0,75pt)

b) Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ (1pt)

c) En déduire une mesure en radian de l'angle $(\vec{BA}; \vec{BC})$ et la nature du triangle BAC (0,5pt)

EXERCICE : II (4points)

On se propose de calculer les intégrales I ; J et K définies ci-dessous :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \text{ et } K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1-) Soit la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

a) Calculer la dérivée f' de f

b) Calculer la valeur de I

2-a) Sans calculer J et K, démontrer que $J + 2I = K$

b) A l'aide d'une intégration par partie portant sur K, démontrer que $K = \sqrt{3} - J$ (1,5pt)

c) En déduire J et K (1pt)

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$11 \sim 14 \text{ cm}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 11 = 11 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

PRPBLEME : (11,5 points)

Le problème comporte trois parties indépendantes A ; B et C

PARTIE : A

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$f(x) = (x - 2)e^x + x$ et $g(x) = (x - 1)e^x + 1$ et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm

1- a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (1,5pt)

b) En déduire le signe de $g(x)$ (0,25pt)

2- a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition (0,5pt)

b) Démontrer que la droite d'équation (D): $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$, puis étudier la position relative de (D) et de (C) (0,75pt)

- c) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat (0,5pt)
- 3- calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation (0,75pt)
- 4- a) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α (0,5pt)
- b) Calculer les valeurs exactes de $f(1,68)$ et $f(1,7)$, puis en déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut (0,5pt)
- 5- a) Tracer (C) (0,75pt)
- b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_t^0 (x-2)e^x dx$ avec $t < 0$ (0,5pt)
- c) Calculer en cm^2 , l'aire $A(t)$ de la partie limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = t$; $x = 0$; $y = x$ puis calculer sa limite quand t tend vers $-\infty$ (0,75pt)

PARTIE : B

On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = x - \frac{e-2}{e-1}$

- 1- déterminer l'unique fonction affine h_0 solution de (E) (0,5pt)
- 2- démontrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si la fonction $u = h - h_0$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y' - y = 0$ (0,5pt)
- 3- résoudre l'équation (E'), puis en déduire les solutions générales de l'équation (E) (1pt)

PARTIE : C

Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_n = e^{-2n} - e^{-n}$

- 1- Etudier la convergence de la suite (U_n) (0,5pt)
- 2- On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
- a) Montrer que $S_n = A_n + B_n$ où A_n et B_n sont des sommes des suites géométriques à déterminer (1pt)
- b) Donner l'expression de S_n en fonction de n , puis calculer sa limite (0,75pt)