

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I



ECOLE NORMALE SUPERIEUR DE YAOUNDE

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ERE} ANNEE SESSION DE 2013

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : MATHEMATIQUES

Epreuve : Analyse –Algèbre-Probabilité

Exercice 1 :

Partie I

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est **vraie** ou **fausse** et proposer une justification de la réponse choisie.

- (1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différents de 1 du plan telle que $\left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$.

Proposition : l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels.

- (2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. on considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$

Proposition : l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.

- (3) Dans le plan complexe 'origine O , on considère pour tout entier naturel non nul n , les points M_n d'affixe $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$

Proposition : les points O , M_1 et M_{20} sont alignés

- (4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$.

Proposition : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

- (5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$

Proposition : pour tout entier naturel non nul, z^{3n} est imaginaire pure.

- (6) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un nombre strictement positif. On rappelle que, pour tout réel strictement positif, la probabilité de l'événement $(X \leq t)$ s'exprime par $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Proposition : Sachant que $X \geq 2$ la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2; 3]$ est égale à $1 - e^{-\lambda}$.

- (7) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$

Proposition : pour tout entier naturel n , on $0 \leq u_n \leq 7$

- (8) On considère 3 points A, B, C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC . On note F l'ensemble des points M vérifiant $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6$

Proposition : F est une sphère de centre G et de rayon 2

- (9) On appelle S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solution de l'équation $3x - 5y = 2$

Proposition : L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1; 3k - 1)$ où k est entier relatif

- (10) Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Proposition : pour tout entier naturel k ($2 \leq k \leq n$), le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre pair.

Partie 2 :

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0; 1]$ telle que

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in [0; 1]$$

On ne cherche pas à déterminer f .

- (1) Déterminer le sens de variation de f sur $[0; 1]$
- (2) Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan x)$
- Justifier que g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, puis que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$
 - Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$. en déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$
- (3) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$
- Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$.
- (4) Calculer à l'aide d'une intégration par parties I_0
- (5)
- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $I_n \geq 0$
 - Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$
 - En déduire la limite de la suite (I_n)

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit S la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle $z' = 5iz + 6i + 4$

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S .
- On note x et x' , y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z' . Démontrer que $x' = -5y + 4$ et $y' = 5x + 6$.
Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 5$. On note E l'ensemble de ces points. On rappelle que l'ensemble des couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $4a + 3b = 5$ est $(a = 3k + 5; b = -4k - 5)$ où k est un entier relatif.

- (3) Déterminer l'ensemble des points M et E coordonnées x et y tels que $-3x' + 4y' = 37$.
- (4) Soient M un point de l'ensemble (E) et M' son image par la transformation S.
- Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.
 - Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ ont la même parité
 - Déterminer l'ensemble des points M de (E) tels que $x'^2 - y'^2 = 20$.

