REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEUR DE YAOUNDE

CONCOURS D'ENTREE EN 1ERE ANNEE SESSION DE 2012

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : MATHEMATIQUES

Epreuve : Analyse –Algèbre-Probabilité

Exercice 1 :

1) Soit (U_n) la suite définie comme suit :
$$U_n = n - 2011 \text{ si } n \geq 4026 \text{ et } U_n = U_{U_n+2012} \text{ si } n \leq 4025$$
   a. Déterminer U_{5000} et U_{4024}
   b. Montrer que si $2014 \leq n \leq 4025$ alors $U_n = U_{n+1}$
   c. Calculer U_0
2) Soit (V_n) une suite telle que $\forall\, n, m \in \mathbb{N}, V_{n+m} = |V_n||V_m|$
   a. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n \geq 0$
   b. En déduire que (V_n) est une suite géométrique
   c. Déterminer V_0 et exprimer V_n en fonction de n sachant que $V_1^3 = 64$

Exercice 2 :

Pour tout couple des réels, on définit la fonction $h_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $h_{a,b}(x) = (ax + b)e^{-2x}$. On définit par E l'ensemble de toutes les fonctions $h_{a,b}$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1. Montrer que $\forall\, (a, b), \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $h_{a,b} + h_{c,d} \in E$ et $\lambda h_{a,b} \in E$. on admettra que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel.

2. On pose $\forall\, x \in \mathbb{R},\ u(x) = e^{-2x}$ et $V(x) = xe^{-2x}$
   Montrer que $B = (u, v)$ est une base de E
3. Soit Ψ l'application qui à tout $h \in E$ associe $\Psi(h) = h' - h$ où h' est la dérivée de h.
   a) Montrer que $\forall\, h \in E, \Psi(h) \in E$
   b) Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.
   c) Déterminer la matrice M de Ψ par rapport à la base B.
4. Déterminer l'élément g de E solution de l'équation différentielle $y' - y = (-3x + 4)e^{-2x}$

Exercice 3:

Pour tout réel $\in \mathbb{R}^*$, on définit la fonction F_λ de $\mathbb{R}$ par :

$$F_\lambda(x) = \lambda x - \lambda^2 x^2 \ln(\lambda x)$$

Partie A :

1. Déterminer l'ensemble de définition D_λ de F_λ en fonction de λ
2. Déterminer la dérivée F_1' de la fonction F_1et exprimer $F_\lambda(x)$en fonction de $F_1(x)$
3. Montrer que $F'_1(x)$ garde un signe constant sur tout intervalle de $D_1 \backslash \{1\}$
4. En déduire le tableau de variation de F_1 suivant les valeurs de λ

Partie B :

Soit (C_λ) la courbe de $F_\lambda$dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1. Montrer que l'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution notée x_1
2. Construire (C_1) et $(C_{-1/2})$ dans un même repère
3. Soit (D) le domaine délimité d'une part par (C_1) et l'axe des abscisses, puis d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = x_1$
   Montrer que $d = A(x_1)^3 + B(x_1)^2 + c$ où A, B et C sont des rationnels à déterminer

Exercice 4:

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $x^4 + 2x^2 + 4 = 0$
   a. Résoudre l'équation (E) ; on mettra les solutions sous forme algébrique.
   b. En déduire que pour tout réel x, $x^4 + 2x^2 + 4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer
2) Une urne contient 20 billes indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 20. Une expérience consiste à tirer au hasard une bille de l'urne et à calculer $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right)^n$ où n est le numéro de la bille. La bille est remise dans l'urne avant le tirage suivant.
   a. Déterminer la probabilité d'obtenir en un tirage un réel strictement positif

Déterminer la probabilité d'obtenir un réel strictement positif en trois tirages au plus