REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE YAOUNDE I

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEUR DE YAOUNDE

CONCOURS D'ENTREE EN 1ERE ANNEE SESSION DE 2009

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

On définit la fonction numérique f de la variable réelle par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+e^{2x}} - 1\right)$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que pour tout réel x,
$f(x) = 2x - \ln\left(\sqrt{1+e^{2x}} + 1\right)$ et $f(x) = x + \ln\left(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}\right)$
2. Montrer que (C) admet deux asymptotes obliques (d) et (d') sécantes en $A(\ln 2, \ln 2)$
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire la courbe (C) ainsi que ses deux asymptotes.
5. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x

Exercice 2 :

Partie A.

On désigne par $[A, B]$ un segment de milieu O du plan (p) et on se propose de déterminer l'ensemble E de toutes les isométries laissant le segment $[A, B]$ globalement invariant.

1. Citer tous les types d'isométries planes.
2. Etant donné un élément f de E, déterminer en justifiant f(0)
3. A partir des valeurs possibles de l'image du point A par un élément f de E,
   a) Montrer que E contient exactement deux déplacements à préciser
   b) Montrer que E admet exactement deux antidéplacements à préciser.
4. Conclure.

Partie B

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points : $A(-1, 1, 1)$; $B(3, 1, 1)$; $C(1, 1, 1 + 2\sqrt{3})$

1. Déterminer :
   a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; et $\mathrm{mes}(\widehat{AOB})$
   b) Le point D tel que ABCD soit un tétraèdre régulier et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ direct.
   c) Déterminer chacun des ensembles des points E_1 et E_2 définis par :
   $E_1 : AM = 2BM$ et E_2: $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{CM}$

<u>Exercice 3</u> :

On considère la suite numérique (U_n) définie par

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \dots . . + \frac{1}{2n+1}$$

1. Déterminer le sens de variation de (U_n)
2. Montrer que (U_n) est majorée par 1. Qu'en conclure ?
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$
4. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$; $U_n \leq \ln 2 \leq U_n + \frac{1}{2n}$
5. Montrer rigoureusement que (U_n) converge vers une limite l à préciser.

Exercice 4:

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation
$$z^4 - 12iz^2 - 100 = 0$$
2. Etant donné un réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation.
   a) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - (2\tan\alpha)z + 2\tan^2\alpha + 1 = 0$
   b) Etant donné le point M_α dont l'affixe est la solution de (E) d'ordonnée positive, montrer que M_α est un point de la conique $(\zeta) : -x^2 + y^2 = 1$
   c) Déterminer la nature, un foyer et l'excentricité de (ζ)
   d) Construire l'ensemble des points M_α lorsque α parcourt $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 5:

1. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :
$$I = \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad ; \quad J = \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$
2. On pose : $A_n = \frac{2n+76}{n+1}$ où n est un entier relatif distinct de -1.
   a) Vérifier que $A_n = 2 + \frac{74}{n+1}$ puis citer tous les diviseurs de 74.
   b) En déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles A_n est aussi un entier.