REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE YAOUNDE I

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEUR DE YAOUNDE

CONCOURS D'ENTREE EN 1ERE ANNEE SESSION DE 2008

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}\,)$ l'ensemble (E) des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0$

1. Montrer que (E) est la réunion d'une ellipse (E1) et d'une hyperbole (E2) dont on donnera les équations réduites respectives.
2. Déterminer l'intersection de (E1) et (E2)
3. Déterminer les foyers de (E1) par rapport au repère R
4. Déterminer l'excentricité et l'axe focal de (E2)
5. La droite (d) : $\sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$ est-elle tangente en au moins un point de (E) ? si oui déterminer un tel point.
6. Construire (E) par rapport au repère R (unité 1cm).

Exercice 2:

Dans cet exercice, les candidats répondront aux questions par vrai (v) ou faux (F) uniquement en recopiant et en complétant le tableau suivant :

Questions	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5
Réponses										

Partie A

Dans le plan complexe, on considère :

- L'ensemble (S) des solutions de l'équation
$$z^3 + 4z^2 + (8-4i)z + 8 - 8i = 0$$
- L'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que $(z-|z|)^3$ soit imaginaire pur
- Le nombre complexe i de module 1 dont l'argument est $\frac{2\pi}{3}$
  1. (S) contient un nombre imaginaire pur
  2. (S) admet un élément dont un argument est $\frac{13\pi}{4}$
  3. Tous les points de (d) : $\sqrt{3}x - 2y = 0$ appartiennent à (E) .
  4. $(1+j)^{210} = -1$
  5. Le point image de j est un élément de (E)

Partie B

On considère dans l'espace un carré ABCD de sens direct dans le plan (ABC) de centre O, d'arrête $\sqrt{2}a$ (avec $a > 0$)

On désigne aussi par S le point tel que : $\overrightarrow{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2a}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$

1. Toute similitude qui transforme A en D et B en A est une isométrie
2. On peut exprimer le milieu de [SD] comme barycentre des points A, B, C et S
3. ACS est équilatéral
4. $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BD} = \sqrt{2}a^2$
5. la composée des reflections $S_{(ABC)}$ et $S_{(ACS)}$ de plans respectifs respectifs (ABC) et (ACS) est un demi – tour d'axe (AS)

PROBLEME

On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x) \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1-x)$$

(C) et (C') désignent les courbes respectives de f et g par rapport à un repère orthonormé (O, I, J) du plan P (unité graphique 2 cm).

Partie A :

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. En déduire le signe de f(x)
3. Montrer que (C') est le symétrique de (C) par rapport à l'origine O.
4. En déduire que pour tout réel dans $]0,1[$, on a $\ln(1+x) < x < -ln(1-x)$

Partie B

1. Déterminer l'ensemble (E) des points M(a, b) tels que la tangente à (C) en a et la tangente à (C') en b soient parallèles.
2. Construire (E), (C) et (C')
3. On désigne par I l'aire du domaine plan délimité par (C) et (C') d'une part et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 0$, et $x = 0{,}8$
   a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de I.
   b) Donner une valeur approchée de I à 0,001 près

Partie C

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots .. + \frac{1}{5n}$

1. Montrer que pour tout entier naturel
$$n \geq 2\,;\ln\left(5+\frac{1}{n}\right) < U_n < \ln\left(5+\frac{5}{n-1}\right)$$
2. La suite (U_n) est-elle convergente ? justifier.
3. Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $U_n = \ln 5$ à $0{,}001$