Communauté Economique et Monétaire de l'Afrique Centrale
(CEMAC)

Institut Sous-Régional de Statistique et d'Economie Appliquée
(ISSEA)

Organisation Internationale

CONCOURS D'ELEVE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE (MAI 2007)

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2

Sauf indication contraire, on arrondira les résultats à 10^{-2} près.

Le taux de pénétration du téléphone mobile dans la population française indique le pourcentage de personnes équipées d'un téléphone mobile par rapport à la population totale.

Le tableau ci-dessous donne, entre 1998 et 2004, l'évolution de la population française et du taux de pénétration.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Population française en millions	60,05	60,32	60,67	61,04	61,43	61,80	62,18
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

(Source : site de l'INSEE)

1. a) Calculer le nombre, en millions, de personnes équipées d'un téléphone mobile en 1999 et en 2004.
   b) Entre ces deux années quel est le pourcentage d'augmentation du taux de pénétration ?
2. Placer dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$: les unités graphiques sont de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées.
3. L'allure du nuage suggère de chercher un ajustement de y en x de la forme : $y = a \ln(x) + b$ où a et b sont des réels. On pose pour cela $z = \ln(x)$.
   a) Recopier et compléter le tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0						
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

   b) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en z, obtenue par la méthode des moindres carrés.
4. En admettant que cet ajustement reste fiable à moyen terme
   a) Déterminer le taux de pénétration en 2006 que l'on peut alors envisager.
   b) A partir de quelle année peut-on penser que le taux de pénétration dépassera 85 % ?

EXERCICE 3

Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir aux buts (penalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque

- 5 buts avec une probabilité de 0,2
- 4 buts avec une probabilité de 0,5
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un joueur au cours d'un entraînement

1. a) Calculer la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs aux buts lors d'un entraînement
b) Préciser les valeurs possibles pour X et établir sa loi de probabilité (on pourra s'aider d'un arbre).
c) Calculer l'espérance de X.

2. L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs aux buts lorsque $X \geq 8$.
Déterminer la probabilité pour un joueur de réussir l'épreuve lors d'un entraînement.

3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement
On admet que les épreuves de tirs aux buts sont indépendantes les unes des autres.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs aux buts au cours des ces 10 entraînements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.
Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec.
Les résultats seront donnés avec 6 chiffres après la virgule.
Calculer pour un joueur :
a) la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
b) la probabilité d'avoir exactement 6 succès.
c) la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

4. Calculer le nombre minimal d'entraînement auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.

EXERCICE 4

L'étude d'une population de 100 individus selon deux caractères x et y a donné les résultats suivants :

x \ y	0	1	2	3	TOTAL
- 1	1		10		**16**
0	1	2		3	**21**
1		10	20		
2		3		7	**25**
TOTAL	**5**	**20**	**60**		

1. Recopier et compléter ce tableau.
2. Calculer pour chaque variable, la moyenne, la variance et l'écart-type
3. Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.