Communauté Economique et Monétaire de l'Afrique Centrale
(CEMAC)

Institut Sous-Régional de Statistique et d'Economie Appliquée
(ISSEA)

Organisation Internationale

CONCOURS D'ELEVE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (MAI 2006)

DURÉE : 4 HEURES

www.touslesconcours.info

EXERCICE 1

1) Calculer $(1+i\sqrt{2})^6$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^6 - 1 = 0$.
3) En déduire dans $\mathbb{C}$ les six solutions de l'équation : $z^6 = 23 - 10i\sqrt{2}$ (Les racines seront données sous la forme algébrique).

EXERCICE 2

On considère dans $\mathbb{C}$, le système d'inconnues x, y, z suivant (S) : $\begin{cases} x+y+z = 2i-1 \\ xy+yz+xz = -2(1+i) \\ x.y.z = 2 \end{cases}$

1) Soit le polynôme à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 - 2(1+i)z - 2$.
   Montrer que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ est solution de (S) si et seulement si a, b et c sont racines de P.
2)
   a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle et une seule que l'on déterminera.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ et en déduire les solutions du système (S) dans $\mathbb{C}^3$.

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. On note L(E) l'ensembles des endomorphismes de E, *Id* l'application identique de E et θ l'application nulle de E.

Pour tout élément f de E, on pose: $fof = f^2$ et $f + f = 2f$.

On se propose d'étudier les éléments f de L(E) tels que: $(f - Id)^2 = \theta$ **(1)**

1. Montrer que $(f - Id)^2 = \theta$ équivaut à $2f - f^2 = Id$
   En déduire que si f est solution de (1), alors f est bijectif et préciser f^{-1}.
2. a) Quelles sont les homothéties vectorielles solutions de (1)?
   b) Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E, f et g les endomorphismes de matrices respectives
   $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que f et g sont solutions de (1).
   En déduire qu'il existe un élément h de L(E) tel que $h \neq \theta$ et $h^2 = \theta$.
3. Soit f une solution de (1) et k un réel; démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$ si, et seulement si, $k = 1$.
4. a) Soit h un élément de L(E) différent de θ tel que $h^2 = \theta$. Soit $\vec{u}_0$ un vecteur de E tel que $h(\vec{u}_0) \neq \vec{0}$.
   Montrer que $(h(\vec{u}_0), \vec{u}_0)$ est une base de E. Donner la matrice de h dans cette base.

www.tousleconcours.info

b) En déduire que, pour f solution de (1) et $f \neq id$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal (unités graphiques: 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées) .

Partie A

1. On considère $n = 1$.
   a) Calculer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$. Que peut – on en déduire pour C_1?
   b) Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation.
   c) Déterminer une équation de la tangente à C_1 en son point d'abscisse 1.
2. On considère $n = 2$.
   a) Calculer les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$. Que peut – on en déduire pour C_2?
   b) Calculer $f_2'(x)$ et dresser le tableau des variations de f_2.
3. Etudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire les positions relatives de C_1 et C_2.
4. Tracer C_1 et 1 C_2.

Partie B

n étant un entier naturel non nul, on pose: $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

1. On pose $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$; calculer $f'(x)$. En déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que: $I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$
3. Calculer I_2 puis l'aire en cm² du domaine plan compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
4. En utilisant la question 2. de la partie B, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a:
   $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$.
5. a) En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1, e]$, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a: $0 \leq I_n \leq 1$.
   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$

www.tousleconcours.info